# Elementární funkce komplexní proměnné

## Exponenciální a goniometrické funkce

**Definice:**

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z \epsilon C$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . \frac{z^{2n}}{(2n)!}, z \epsilon C$$

$$\sin z = + \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, z \epsilon C$$

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, z \epsilon C - \left\{(2k-1).\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\mathrm{cotg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}, z \epsilon C - \{k\pi\}$$

Dá se dokázat např. $e^{z_1}. e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, součtové vzorce pro funkce sin z, cos z, atd.

## Eulerovy vztahy

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots + i.\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$\left.\left.\begin{array}{l} \boxed{\forall z \epsilon C; e^{iz} = \cos z + i. \sin z} \\ e^{-iz} = \cos z - i. \sin z \end{array}\right\}+ \right\}-$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{array}}$$

**Speciálně:** $e^z = e^{x+iy} = e^x. e^{iy} = e^x. (\cos y + i. \sin y)$

exponenciální tvar komplexního čísla $|z|e^{i\varphi} = |z|. (\cos \varphi + i. \sin \varphi)$

Př.

$$e^{\frac{\pi}{4}i} = \cos\frac{\pi}{4} + i. \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i. \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$e^{2-\pi i} = e^2. e^{-\pi i} = e^2. (\cos(-\pi) + i. \sin(-\pi)) = -e^2 \epsilon R$$

**Vlastnosti odlišné od funkcí reálné proměnné:**

1. $w = e^z$ je periodická s periodou $2\pi i$

<u>Důkaz:</u> $e^{z+2k\pi i} = e^z . e^{2k\pi i} = e^z .(\cos 2k\pi + i.\sin 2k\pi) = e^z .(1 + i0) = e^z$

2. Funkce $w = \cos z$, $w = \sin z$ nejsou ohraničené v C

<u>Důkaz:</u> např. pro $\cos z$:

položíme $z = iy, y \epsilon R$

$$\cos iy = \frac{e^{i.iy} + e^{-i.iy}}{2} = \frac{e^y + e^{-y}}{2} > \frac{1}{2} e^y, \text{ale } \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{2} e^y = +\infty$$

**Věta:**

$\forall z \epsilon C, (e^z)' = e^z; (\cos z)' = -\sin z; (\sin z)' = \cos z$

$\forall z \epsilon C - \left\{(2k-1).\frac{\pi}{2}\right\}, (\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$

$\forall z \epsilon C - \{k\pi\}, (\operatorname{cotg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}$

**Důkaz:** pro $e^z$:

1. $e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x .(\cos y + i.\sin y) = e^x \cos y + i.e^x .\sin y$ $\quad u(x;y) = e^x \cos y$, $v(x;y) = e^x \sin y$

$C - R$ podmínky: $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\qquad (e^{x+iy})' = e^x .\cos y + i.e^x .\sin y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$

2. $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$

D

$(e^z)' = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots = e^z$

<u>Poznámka:</u> Pro derivace funkcí komplexní proměnné platí známé vztahy.

## Logaritmická funkce komplexní proměnné

- Inverzní funkce k funkci $e^z$. Ale $e^z$ není prostá funkce v C (je periodická), tedy logaritmická funkce je mnohoznačná funkce.

$w = \operatorname{Ln} z \Leftrightarrow z = e^w$

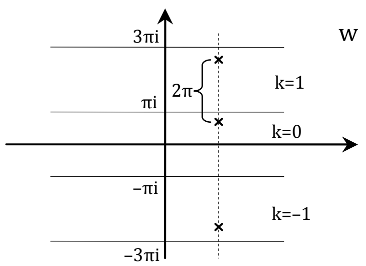
$w = u + iv \quad z = e^{u+iv}$

$|z|.(\cos\varphi + i.\sin\varphi) = e^u(\cos v + i.\sin v)$

$e^u = |z| \wedge v = \varphi + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \ldots$

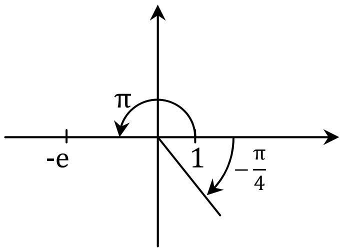
$u = \ln|z| \quad v = \arg z + 2k\pi, \arg z \,\epsilon(-\pi, \pi\rangle$

Závěr: $\boxed{\forall z \epsilon C - \{0\}, \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i.(\arg z + 2k\pi)}$



Pro $k = 0$ jde o tzv. hlavní hodnotu (větev) funkce Ln z. Značí se $w = \lg z$ a jde o jednoznačnou funkci. Platí pro ni např. $(\lg z)' = \frac{1}{z}$, $z \epsilon C - \{z \epsilon R; z \leq 0\}$

<u>Př.</u>
$\mathrm{Ln}\,(-e) = \ln|-e| + i.(\arg(-e)2k\pi) = 1 + i.(\pi + 2k\pi) = 1 + (2k+1)\pi.i; k = 0, \pm 1, \ldots$




$$\mathrm{Ln}\,(1 - i) = \ln|1 - i| + i.\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \frac{1}{2}\ln 2 + (8k-1).\frac{\pi}{4}i$$

## Obecná exponenciální funkce
$w = \{\alpha^z\} = e^{z \mathrm{Ln}\,\alpha}, \alpha \epsilon C - \{0\}, z \epsilon C$

## Obecná mocnina
$w = \{z^\alpha\} = e^{\alpha \mathrm{Ln}\,z}, \alpha \epsilon C, z \epsilon C - \{0\}$

Jedná se o mnohoznačné funkce.
Hlavní hodnoty značíme $\alpha^z$ nebo $z^\alpha$ (k=0).

<u>Př.</u>
$\mathrm{Ln}\,i = \ln|i| + i.\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i;\; k = 0, \pm 1, \ldots$

$1.\, i^3 = e^{3 \mathrm{Ln}\,i} = e^{3\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i} = e^{\frac{3}{2}\pi i + 6k\pi i} = e^{\frac{3}{2}\pi i} = \cos\frac{3}{2}\pi + i.\sin\frac{3}{2}\pi = -i$

$2.\, \sqrt{i} = i^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,i} = e^{\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)i} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i.\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) =$

$$= \begin{matrix} \cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i.\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\frac{5}{4}\pi + i.\sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i.\frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix} \quad k = 0, 1$$

$3.\, i^{-i} = e^{-i \mathrm{Ln}\,i} = e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \epsilon R$

## Cyklometrické funkce
- Inverzní funkce ke goniometrickým funkcím, které nejsou prosté ve svém definičním oboru.

Cyklometrické funkce Arcsin z, …, Arccotg z.

<u>Př.</u> Řešte v C rovnice $\sin z = 2i \Rightarrow z = \mathrm{Arcsin}\,2i$.

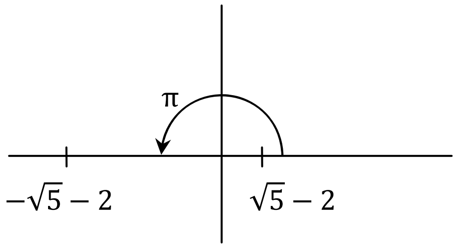
$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2i$$

$$e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}} = -4$$

$e^{2iz} + 4e^{iz} - 1 = 0$, subst. $e^{iz} = a$

$a^2 + 4a - 1 = 0$

$a_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$




1. $e^{iz} = -2 + \sqrt{5}$

$iz = \mathrm{Ln}\left(-2 + \sqrt{5}\right)$

$iz = \ln\left|-2 + \sqrt{5}\right| + i.(0 + 2k\pi)$

$z_1 = 2k\pi - i.\ln\left(-2 + \sqrt{5}\right), k = 0, \pm 1, \ldots$

2. $e^{iz} = -2 - \sqrt{5} \Leftrightarrow iz = \mathrm{Ln}\left(-2 - \sqrt{5}\right)$

$iz = \ln\left|-2 - \sqrt{5}\right| + i.(\pi + 2k\pi)$

$z_2 = \pi + 2k\pi - i.\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)$

## Hyperbolické funkce

$\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$

$\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

$\mathrm{tgh}\, z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z} = \dfrac{1}{\mathrm{cotgh}\, z}$

## Komplexní funkce reálné proměnné

$f(t) = u(t) + i.v(t), t \epsilon R$

Např. $f'(t) = u'(t) + i.v'(t)$

nebo $\int_{\alpha}^{\beta} f(t).dt = \int_{\alpha}^{\beta} u(t).dt + i.\int_{\alpha}^{\beta} v(t).dt$ apod.

## Křivky v Gaussově rovině

**Definice 4.16.** Orientovanou křivkou rozumíme libovolné spojité zobrazení $\gamma$ intervalu $\langle\alpha; \beta\rangle$ do $C^*$.

Píšeme $z = \gamma(t); t \epsilon \langle\alpha; \beta\rangle$

$\gamma(\alpha)$ – počáteční bod křivky

$\gamma(\beta)$ – koncový bod křivky

## Graf křivky

$[\gamma] = \{z \epsilon C, z = \gamma(t), t \epsilon \langle\alpha; \beta\rangle\}$

<u>Poznámka:</u> Každá křivka jednoznačně určuje svůj graf, ale různé křivky mohou mít stejný graf.

**Definice 4.17.** Křivku $\gamma$ nazýváme parametrizací množiny $A \subset C^*$, je-li $[\gamma] = A$.

Př.

$a, b \in C$

$\gamma_1(t) = a + (b - a).\, t, t \in \langle 0; 1\rangle$

$\gamma_2(t) = a + (b - a).\, t^4, t \in \langle 0; 1\rangle$

$\gamma_3(t) = a + (b - a).\, (1 - \cos t), t \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$

$[\gamma_1] = [\gamma_2] = [\gamma_3] =$ úsečka s krajními body a; b