2. $\lim\limits_{z\to -i} \dfrac{z^2 - i}{z+i} = \lim\limits_{z\to -i} \dfrac{(z+i).(z^2 - iz - 1)}{z+i} = \lim\limits_{z\to -i} (z^2 - iz - 1) = (-1)^2 - i.(-i) - 1 = -3$

typ „$\frac{0}{0}$"

Obdobně jako u reálné proměnné

Spojitost funkce komplexní proměnné

Definice 4.7. Funkce f nazveme spojitou v bodě $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to a} f(z) = f(a)$.
Funkci f nazveme spojitou v oblasti Ω, je-li spojitá v každém jejím bodě.

(Oblast = otevřená a souvislá množina)

Př.

$f(z) = \dfrac{z^2 - i}{z+i}$ je spojitá pro každé $z\epsilon C - \{i\}$

Je možné funkci f v bodě z=–i tak, aby tam byla spojitá?

$f(-i) = 2i$ **NE**

$f(-i) = -3$ **ANO**

$f(z) = u(x;y) + i.v(x;y);\ a = a_1 + i.a_2$

Derivace komplexní proměnné

Definice 4.8. $f'(a) = \lim\limits_{z\to a} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}$

Př.

1. $(z^2)'_{z=a} = \lim\limits_{z\to a} \dfrac{z^2 - a^2}{z - a} = \lim\limits_{z\to a} \dfrac{(z-a).(z+a)}{z-a} = 2a$

v obecném bodě $(z^2)' = 2z$, protože $(z^n)' = n.z^{n-1}$, $n\epsilon N$

2. $f(z) = |z|, a = 0$

$f'(0) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{|z| - |0|}{z - 0} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{|z|}{z}$ neexistuje

3. $f(z) = \dfrac{z^2 + i}{z};\ z\epsilon C - \{0\}$

$f'(z) = \dfrac{2z.z - (z^2 + i).1}{z^2} = \dfrac{z^2 - i}{z^2}$

$f(z) = z + \dfrac{i}{z} = z + i.z^{-1}$

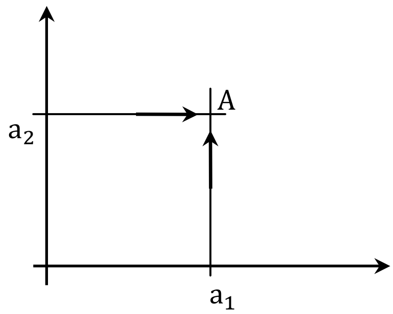
$f'(z) = 1 + i(-z^{-2}) = 1 - \dfrac{i}{z^2}$

platí opět **známé** věty o derivování součtu, součinu a podílu funkcí i o derivování složené funkce

! **Věta 4.10.** Funkce $f(z) = u(x;y) + i.v(x;y)$ má v bodě $a = a_1 + i.a_2$ derivaci, právě když $u(x;y)$, $v(x;y)$ jsou diferencovatelné funkce v $A = [a_1; a_2]$ a když platí tzv. Cauchy-Riemannovy rovnosti
$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_A = \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)_A \wedge \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_A = -\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)$.

Pak $f'(a) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_A + i.\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)_A = \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)_A - i.\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_A$

Princip důkazu:



$$f(a)=\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\lim_{x+iy\to a_1+ia_2}\frac{f(x+iy)-f(a_1+ia_2)}{x+iy-(a_1+ia_2)}=$$

$$=\lim_{[x;y]\to[a_1,a_2]}\frac{u(x;y)+iv(x;y)-\big(u(a_1;a_2)+iv(x,y)\big)}{x+iy-(a_1+ia_2)}=$$

$$=\lim_{[x;y]\to[a_1;a_2]}\frac{u(x;y)-u(a_1;a_2)+i.\big(v(x;y)-v(a_1;a_2)\big)}{x-a_1+i(y-a_2)}$$

Speciálně:

$$y=a_2\colon f'(a)=\lim_{x\to a_1}\frac{u(x;a_2)-u(a_1;a_2)+i\big(v(x;a_2)-v(a_1;a_2)\big)}{x-a_1}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_A$$

$$x=a_1\colon \lim_{y\to a_2}\frac{u(a_1;y)-u(a_1;a_2)+i\big(v(a_1;y)-v(a_1;a_2)\big)}{i(y-a_2)}=\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_A-i\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_A$$

<u>Př.</u>

1. $f(z)=i(z^2-1);\ z\epsilon C$

$$f(x+iy)=i((x+iy)^2-1)=-2xy+i(x^2-y^2-1)\quad \begin{matrix}u(x;y)=-2xy\\ v(x;y)=x^2-y^2-1\end{matrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2y\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-2y\ \wedge\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2x=-\left[\frac{\partial v}{\partial x}=2x\right]$$ C.–R. podmínky jsou splněny pro každé $z\epsilon C$

$$f'(x+iy)=-2y+i2x=2i(x+iy)$$

$$f'(z)=2iz$$

2. $f(z)=z.\mathrm{Re}\,z, z\epsilon C$

$$f(x+iy)=(x+iy).x=x^2+ixy\quad \begin{matrix}u(x;y)=x^2\\ v(x;y)=xy\end{matrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial v}{\partial y}=x\ \Rightarrow \text{jen pro } x=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0=-\left[\frac{\partial v}{\partial x}=y\right]\ \Rightarrow \text{jen pro } y=0$$

$f'(z)$existuje pouze pro $z=0$

Definice 4.9. Řekněme, že funkce f je holomorfní v bodě a, jestliže má v jistém okolí tohoto bodu derivaci.

Řekněme, že funkce f je holomorfní v oblasti Ω, je-li holomorfní v každém jejím bodě.

<u>Př.</u>

1. $f(z)=i(z^2-1)$ je holomorfní v C

2. $f(z)=z.\mathrm{Re}\,z$ má sice v bodě $z=0$ derivaci, ale není tam holomorfní → v okolí bodu nemá derivace.

Důsledek C.-R. podmínek

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\Big|\;\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}\;\Big|\,\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 - \text{Laplaceova rovnice}$$

$$\left.\begin{array}{r} \Delta u = 0 - \ \text{harmonická funkce} \\ \text{stejně } \Delta v = 0 \qquad\qquad\qquad\quad \end{array}\right\} \text{harmonické sdružené funkce}$$

<u>Poznámka:</u> Holomorfní funkce je až na aditivní konstantu jednoznačně určená jednou svojí částí.

<u>Př.</u> Dokažte, že funkce $u(x;y) = x - 4xy$ je harmonická v R^2 a pak najděte holomorfní funkci f takovou, že v C platí $\operatorname{Re} f = u(x;y)$.

<u>Řešení:</u>

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - 4y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -4x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}_{\Delta u = 0}$$

$u(x;y)$ je harmonická v R^2

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 1 - 4y \Rightarrow v(x;y) = \int (1-4y).\,dy = y - 2y^2 + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = 4x \Rightarrow \varphi(x) = \int 4x.\,dx = 2x^2 + K$$

harmonická sdružená funkce f $u(x;y)$ je $v(x;y) = y - 2y^2 + 2x^2 + K$

$f(x+iy) = x - 4xy + i(y - 2y^2 + 2x^2 + K)$

např. pro počáteční podmínku $f(0) = -2i$, dostáváme

$f(0) = Ki = -2i \Rightarrow K = -2$

$f'(x+iy) = 1 - 4y + i4x = 4i(yi + x) + 1$

$f'(z) = 4iz + 1 \rightarrow f(z) = 2iz^2 + z + Ki$

Derivování mocninné řady člen po členu

např. pro $z_0 = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.\,z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = s(z), R$$

D

$$\sum_{n=1}^{\infty} n.\,a_n.\,z^{n-1} = a_1 + 2a_2 z + \cdots = s'(z)$$

atd.

Př.

Určete součet mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots = \frac{1.(1-z) - z.(-1)}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2} = s'(z)$$

D

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = z + z^2 + z^3 + \cdots = \frac{z}{1-z} = s(z)$$

D

$$s = \frac{a_1}{1-q} \quad |q| = |z| < 1 = R$$