2. $\longleftarrow$

$$z = x + iy \Rightarrow x = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \frac{1}{i} = -i$$

$$\bar{z} = x - iy \Rightarrow y = \frac{\bar{z}-z}{2} = i.\frac{\bar{z}-z}{2}$$

$\mathrm{Re}\, f = x + 2y;\quad \mathrm{Im}\, f = 1 - 2x + y$

$f(x+iy) = x + 2y + i.(1 - 2x + y)$

$$f(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} + 2i.\frac{\bar{z}-z}{2} + i\left(1 - 2.\frac{z+\bar{z}}{2} + i.\frac{\bar{z}-z}{2}\right) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z} + i\bar{z} - iz + i - iz - i\bar{z} + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\bar{z} =$$
$$= z - 2iz + i$$

$f(z) = (1-2i)z + i$

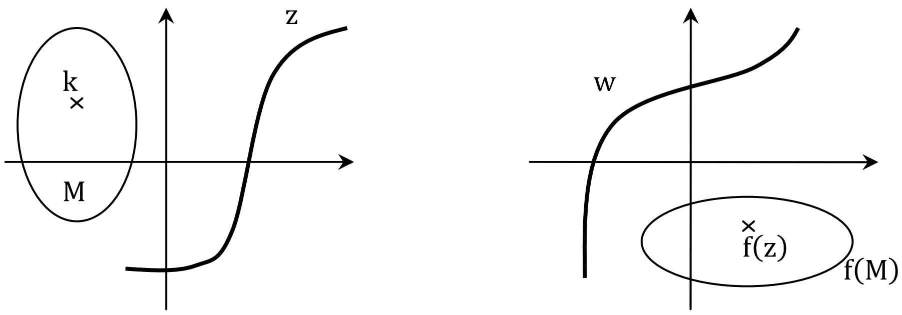
$f(x+iy) = (x+iy) - 2(ix - y) + i = (x+iy) - 2i(x+iy) + i$

Definice Řekneme, že funkce $f(z)$ je omezená v $M \subset C \Leftrightarrow \exists k \geq 0; \forall z \epsilon M; |f(z)| \leq k$

$$\begin{matrix} |u(x;y)| \\ |v(x,y)| \end{matrix} \leq |f(z)| = \sqrt{u^2(x;y) + v^2(x;y)} \leq |u(x;y)| + |v(x;y)|$$

Věta $f(z)$ je omezená v $M \subset C \Leftrightarrow u(x;y), v(x;y)$ jsou omezené v $M_0 \subset R^2$

Problém s grafickým znázorněním funkce w=f(z)



Posloupnosti komplexních čísel

$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\} = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + ib_n\}$

Definice 4.1.

$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists n_0; (n \geq n_0 \Rightarrow |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon)$

Věta 4.1.

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + ib_n) = a + ib \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

$$\begin{matrix} |a_n - a| \\ |b_n - b| \end{matrix} \leq |\alpha_n - \alpha| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

<u>Př.</u>

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1-n^2}{n^2+n-1} + i.\frac{2n+1}{n+1}\right) = -1 + 2i$

protože:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{n^2+n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-1}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}=-1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2$$

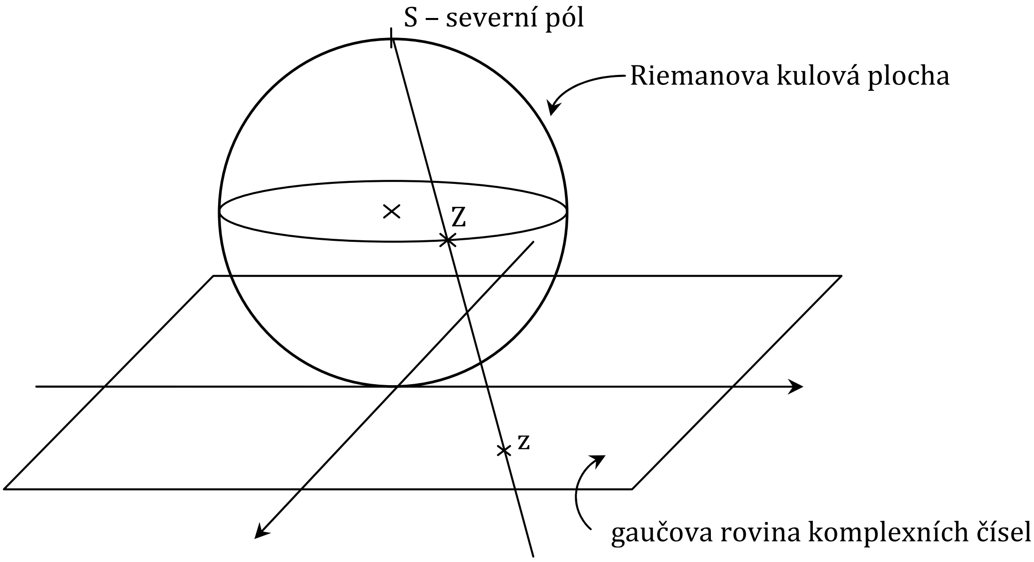
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-in}{1+in}.\frac{1-in}{1-in}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2in+i^2n^2}{1-i^2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-n^2}{1+n^2}+i.\frac{-2n}{1+n^2}\right)=-1$

nebo:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-in}{1+in}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-i}{\frac{1}{n}+i}=\frac{-i}{i}=-1$$

Příklady kde byly vlastní limity $\alpha\epsilon C$

Stereografická projekce



Bod S je obraz nevlastního komplexního čísla ∞ $C^* = C \cup \{\infty\}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\infty$, je – li $\lim\limits_{n\to\infty}|\alpha_n|=\infty$, což nastane právě když $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^2=+\infty$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty}b_n^2=+\infty$

<u>Př.</u>

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-i.\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\infty$$

protože:

$$\lim_{n\to\infty}a_n^2=\lim_{n\to\infty}n=+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\begin{array}{l}-\text{ vlastní }-\text{ konverguje}\\ -\text{ nevslastní}\\ -\text{ neexistuje}\end{array}\Big\}-\text{ diverguje}$$

Řady komplexních čísel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \rightarrow \text{posloupnost částečných součtů: } \{s_n\}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{array}{l} s \epsilon C - \text{součet řady} - \text{konverguje} \\ \quad\;\; \infty \\ \text{neexistuje} \end{array} - \text{diverguje}$$

Věta 4.2. $\sum (a_n + ib_n)$ konverguje $\Leftrightarrow \sum a_n, \sum b_n$ konvergují $\Rightarrow s = s_a + is_b$

Nutná podmínka konvergence

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

Př.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-i} \cdot \frac{n+i}{n+i} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n}{n^2+1}}_{a_n} + i \cdot \underbrace{\frac{1}{n^2+1}}_{b_n}$$

diverguje, protože $\sum \frac{n}{n^2+1}$ diverguje, např. podle integrálního kritéria: $\int_1^{\infty} \frac{n}{n^2+1} . dn =$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln|1+n^2|\right]_1^{\infty} = +\infty$$

Věta 4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ konverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ konverguje

$$\begin{array}{l} \sum \alpha_n \\ \sum |\alpha_n| \end{array} \left| \begin{array}{cccc} K & K & \cancel{D} & D \\ K & D & \cancel{K} & D \end{array} \right|$$

absolutní konvergence

relativní konvergence

Př.

$$\sum (-1)^{n+1} . \frac{1}{n-i}$$

$$\sum \left| (-1)^{n+1} . \frac{1}{n-i} \right| = \sum \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - \text{diverguje (např. srovnávací kritérium)}$$

$$\sum \left[(-1)^{n+1} . \frac{n}{n^2+1} + i . (-1)^{n+1} . \frac{1}{n^2+1} \right]$$

alternující řady $\sum (-1)^{n+1} . \frac{n}{n^2+1}$ a $\sum (-1)^{n+1} . \frac{1}{n^2+1}$ konvergují

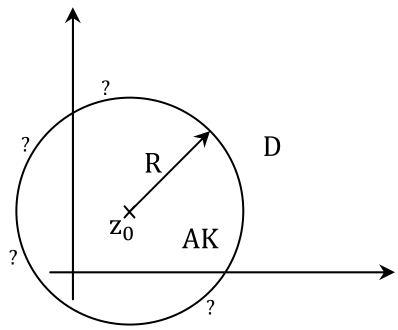
Tedy daná řada **konverguje relativně**.

Mocninné řady v komplexním oboru

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots, \text{ střed } z_0 \epsilon C, a_n \epsilon C$$

Geometricky

Ke každé mocninné řadě existuje reálné číslo $0 \leq R \leq +\infty$



$|z-z_0| < R$ – absolutně konverguje (AK)

$|z-z_0| > R$ – diverguje (D)

$|z-z_0| = R$ – ?

konvergenční kružnice

Speciálně:

1. R=0 → řada konverguje pouze pro $z = z_0$
2. R=+∞ → řada konverguje pro každé $z \epsilon C$

<u>Př.</u>

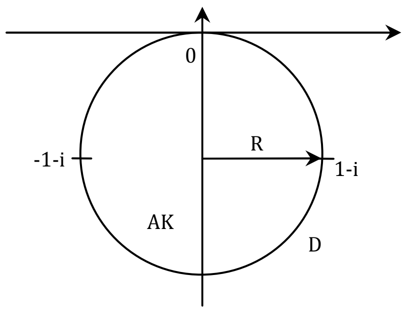
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n} = (z+i)^1 + \left(\frac{z+i}{2}\right)^2 + \cdots \quad \text{střed } z_0 = -i$$

$$\sum \left|\frac{(z+i)^n}{n}\right| - \text{ podílovým kritériem}$$

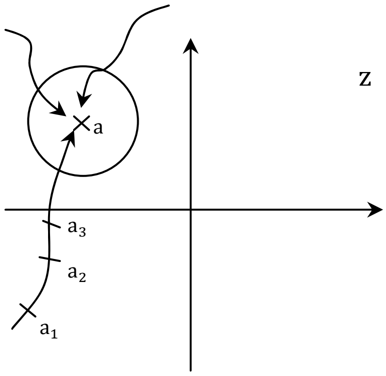
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(z+i)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(z+i)^n}{n}}\right| = |z+i| . \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |z+i| < 1 = R$$

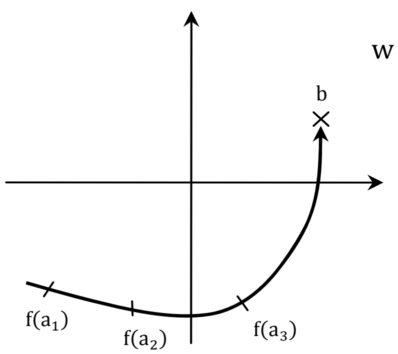
$$z = 1 - i\text{: } \sum \frac{1}{n} - \text{ diverguje}$$

$$z = -1 - i\text{: } \sum (-1)^n . \frac{1}{n} - \text{konverguje}$$



Limita funkce komplexní proměnné $w = f(z)$





Definice 4.6. $\lim\limits_{z\to a} f(z) = b \Leftrightarrow \forall\{a_n\}; a_n \neq a; \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = b\right)$

Věta 4.7. $a = a_1 + a_2 i, f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$

$\lim\limits_{z\to a} f(z) = \lim\limits_{[x;y]\to[a_1;a_2]} u(x;y) + i.\lim\limits_{[x;y]\to[a_1;a_2]} v(x;y)$, existuje – li limita vlevo

nebo obě limity vpravo

<u>Př.</u>

1. $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{|z|} =$ neexistuje