II. Určení $\vec{y}_p$ metodou odhadu tvaru řešení

Přesněji – skripta str. 59

Př.

$$y_1' = -2y_1 + y_2 - e^{2x}$$

$$y_2' = -3y_1 + 2y_2 + 6e^{2x}$$

Odhad tvaru řešení:

$$y_1 = A.e^{2x}$$

$$y_2 = B.e^{2x}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = 2.A.e^{2x} = -2.A.e^{2x} + B.e^{2x} - e^{2x} \\ y_2' = 2.B.e^{2x} = -3.A.e^{2x} + 2.B.e^{2x} + 6.e^{2x} \end{array}\right| : e^{2x}$$

$$\begin{array}{llll} 4A & -B & = -1 \\ 3A & & = 6 \end{array}$$

$$A = 2, B = 9$$

$$\vec{y}_p: \begin{array}{l} y_1 = 2.e^{2x} \\ y_2 = 9e^{2x} \end{array}$$

Diferenciální rovnice vyšších řádů

nebo jejich soustavy lze často převést na soustavu lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu – obecněji ve skriptech **str. 61**.

Př.

$$\begin{array}{r} y_1'' + 3y_2' - 4y_1 + 6y_2 = 0 \\ y_1' + y_2'' - 2y_1 + 4y_2 = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} z_1 = y_1, z_2 = y_1' \\ z_3 = y_2, z_4 = y_2' \end{array}$$

Zavedeme nové neznámé funkce:

$$\begin{array}{lllll} z_1' = & & z_2 & & \\ z_2' = & 4z_1 & & -6z_3 & -3z_4 \\ z_3' = & & & & z_4 \\ z_4' = & 2z_1 & -z_2 & -4z_3 & \end{array}$$

3. Funkce komplexní proměnné

Komplexní číslo (opakování) – C

$z = [a; b]$ – uspořádaná dvojice reálných čísel

Algebraický tvar komplexního čísla

$z = a + bi$, i – ryze imaginární jednotka $i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$

$$\begin{array}{l} a - \text{reálná část} \\ b - \text{imaginární část} \end{array} \text{komplexního čísla} \quad \begin{array}{l} \mathrm{Re}\, z = a \\ \mathrm{Im}\, z = b \end{array}$$

Speciálně $z = a$ – reálné číslo
$z = b$ – ryze imaginární číslo

Komplexně sdružené číslo $\overline{z} = a - bi$ k číslu $z = a + bi$

Přirozené mocniny čísla i

$\ldots, i^{-1} = -i, i^{0} = 1, \underbrace{i^{1} = i, i^{2} = -1, i^{3} = -i, i^{4} = 1}_{\text{opakují se}}, i^{5} = i, \ldots$

$$\boxed{i^{-1} = \frac{1}{i} = -i}$$

Dělení komplexních čísel

$z.\overline{z} = (a + bi).(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$ – reálné číslo

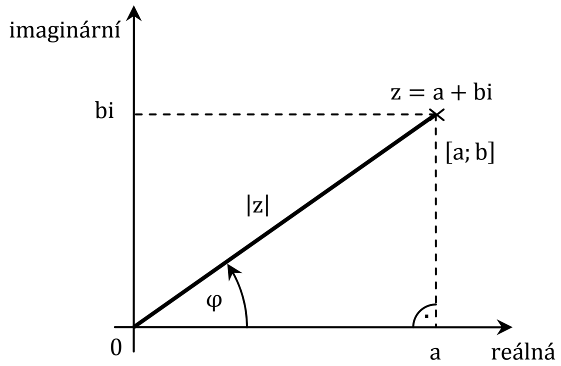
$$\frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{\ldots}{c^2 + d^2}$$

Př.

$$\frac{1 - 2i}{1 + 2i} \cdot \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = \frac{1 - 2i - 2i + 4i^2}{1 + 4} = \frac{4i^2 - 4i + 1}{1 + 4} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

Geometrické zobrazení komplexních čísel

Gaussova rovina komplexních čísel



absolutní hodnota komplexního čísla

$|z| = \sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

argument komplexního čísla α:

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|}$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{|z|}$$

Goniometrický tvar komplexního čísla $z = |z|.(\cos\alpha + i.\sin\alpha)$

Exponenciální tvar komplexního čísla $z = |z|.e^{i\alpha}$

Odmocniny komplexních čísel

Každé komplexní číslo $z \neq 0$ má v C n od sebe různých n-tých odmocnin.

$$\sqrt[n]{z} = w \Leftrightarrow w^n = z$$

Př. vypočítejte $\sqrt{-3 - 4i}$

Řešení:

$$\sqrt{-3 - 4i} = x + iy \Leftrightarrow (x + iy)^2 = -3 - 4i$$

$$x^2 - y^2 + i2xy = -3 - 4i$$

$$x^2 - y^2 = -3$$

$$2xy = -4 \rightarrow y = -\frac{2}{x}$$

$x^2 - \left(-\frac{2}{x}\right)^2 = -3$

$x^2 - \dfrac{4}{x^2} = -3$

$x^4 - 3.x^2 - 4 = 0$

$(x^2 + 4).(x^2 - 1) = 0$

$x^2 + 4 = 0 \rightarrow$ nevyhovuje žádné $x \epsilon R$

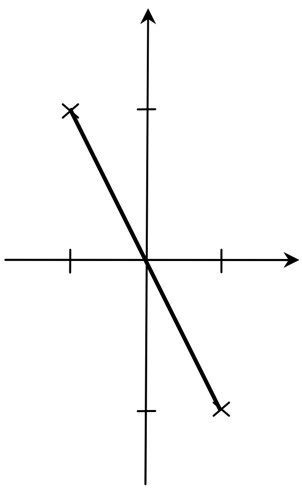
$(x^2 - 1) = 0$

$(x - 1).(x + 1) = 0$

$x_1 = 1 \quad y_1 = -2$
$x_2 = -1 \quad y_2 = 2$

$\sqrt{-3-4i} = \begin{matrix} 1-2i \\ -1+2i \end{matrix}$

v C $\sqrt{1} = \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}$



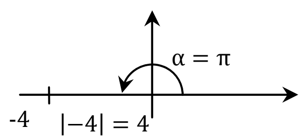
<u>Binomická věta</u>
n-tého řádu: $z^n = a, a \epsilon C$

Řešení hledáme v goniometrickém tvaru

Moivreova věta
$z^n = \left(|z|.(\cos\alpha + i.\sin\alpha)\right)^n = |z|^n.(\cos n.\alpha + i.\sin n.\alpha)$

<u>Př.</u> Řešme v C rovnici $z^4 = -4 \left(\sqrt[4]{-4}\right)$
$|z|^4(\cos 4\alpha + i.\sin 4\alpha) = 4.(\cos\pi + i.\sin\pi)$

$|z|^4 = 4 \wedge 4\alpha = \pi + 2k\pi$



$\cos\alpha = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{-4}{4} = -1$

$\sin\alpha = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{0}{4} = 0$

$|z| = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \wedge$

$\wedge\ \alpha = \dfrac{\pi}{4} + k.\dfrac{\pi}{2}$

$k = 0; 1; 2; 3$

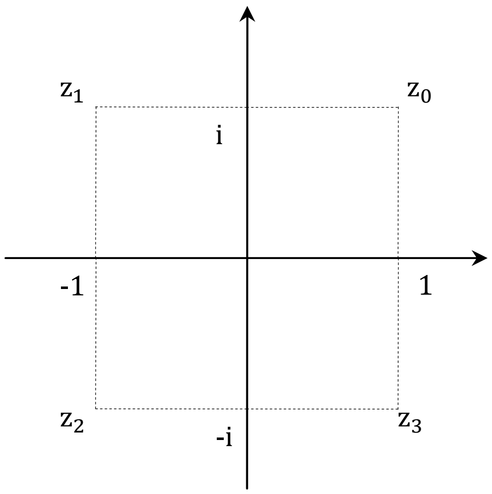
stejný počet jako je mocnin

$z_0 = \sqrt{2}.\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i.\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.e^{i.\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$

$z_1 = \sqrt{2}.\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi + i.\sin\dfrac{3}{4}\pi\right) = \sqrt{2}.e^{i.\frac{3}{4}\pi} = -1 + i$

$z_2 = \sqrt{2}.\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi + i.\sin\dfrac{5}{4}\pi\right) = \sqrt{2}.e^{i.\frac{5}{4}\pi} = -1 - i$

$z_3 = \sqrt{2}.\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi + i.\sin\dfrac{7}{4}\pi\right) = \sqrt{2}.e^{i.\frac{7}{4}\pi} = 1 - i$



Obecně: vrcholy pravidelného n-úhelníku

Komplexní funkce komplexní proměné

Definice 4.4. Každou binární relaci v C nazveme funkcí komplexní proměné $f \subset C \times C$, $[z; w] \epsilon f$, píšeme $w = f(z)$.

Př.

1.

$w = f(z) = \frac{\bar{z}}{z}, D(f) = C - \{0\}$ **jednoznačná funkce**

$$f(i) = \frac{-i}{i} = -1, f(2+i) = \frac{2-i}{2+i} . \frac{2-i}{2-i} = \frac{4-4i+i^2}{4-i^2} = \frac{3-4i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i, \text{apod.}$$

2.

$w = f(z) = z + \sqrt{2-2z}, D(f) = C$ **mnohoznačná funkce**

$$f(0) = \sqrt{2} \begin{matrix} +\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{matrix}, \quad f(1+i) = 1 + i + \sqrt{-2i} = \begin{matrix} 1+i+1-i = 2 \\ 1+i-1+i = 2i \end{matrix}$$

$\sqrt{-2i} = x + yi \Leftrightarrow (x+yi)^2 = -2i$

$x^2 - y^2 + i2xy = 0 - 2i$

$x^2 - y^2 = 0$

$2xy = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{x}$

$x^2 - \left(-\frac{1}{x}\right)^2 = 0$

$x^4 - 1 = 0$ $\quad x_1 = 1 \quad y_1 = -1$

$\underbrace{(x^2+1)}_{\neq 0}(x-1)(x+1) = 0$ $\quad x_2 = -1 \quad y_2 = 1$

část funkce f

reálná imaginární

$w = f(z), z = x + yi$

$$f(x+yi) = u(x;y) + i.v(x;y) \rightarrow f(x+yi) = \text{Re } f + i.\text{Im } f$$

Př.

1.

$f(z) = z^2.\text{Re } z, z \epsilon C$

$$f(x+yi) = (x+yi)^2.x = (x^2 + i2x - y^2).x = (x^3 - y^3x) + i2x^2y$$

$\text{Re } f = x^3 - x.y^3 \quad \text{Im } f = 2x^2y$