$\underline{\lambda_2 = 1:}$

výsledek 0 → závislost rovnic → nekonečně mnoho řešení

$$\begin{aligned} 4k_1 + 4k_2 - 2k_3 &= 0 \\ k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \,|.(-2)\ \ |.4 \\ 6k_1 - 6k_2 + 4k_3 &= 0 \end{aligned}$$

$k_3 = 0; k_1 = k_2 = t; t \neq 0$

např. $k_1 = k_2 = 1$

$$^1\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.e^{2x};\quad ^2\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.e^{x};\quad ^3\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.e^{-x} \rightarrow \text{fundamentální systém řešení}$$

$\underline{\lambda_3 = -1:}$

$$\begin{aligned} -2k_1 + 4k_2 - 2k_3 &= 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 &= 0\ \ |.2 \\ 6k_1 - 6k_2 + 6k_3 &= 0 \end{aligned}$$

$k_2 = 0; k_3 = -k_1$

např. $k_1 = 1; k_3 = -1$

obecné řešení:

$$\vec{y} = c_1.\ ^1\vec{y} + c_2.\ ^2\vec{y} + c_3.\ ^3\vec{y}$$

$$\vec{y} = c_1.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.e^{2x} + c_2.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.e^{x} + c_3.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.e^{-x}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= c_2.e^{x} + c_3.e^{-x} \\ y_2 &= c_1.e^{2x} + c_2.e^{x} \\ y_3 &= 2.c_1.e^{2x} - c_3.e^{-x} \end{aligned}}$$

2. Charakteristická rovnice má vícenásobné reálné kořeny

Věta 3.8. Nechť nějaká λ je n-násobný kořen charakteristické rovnice soustavy $\vec{y}' = A.\vec{y}$. Pak existuje m.násobný lineárně nezávislých řešení této soustavy ve tvaru $^1\vec{y} = {}^1P(x).e^{\lambda x}, \dots, {}^m\vec{y} = {}^mP(x).e^{\lambda x}$, kde složky vektorů $^1P(x), \dots, {}^mP(x)$ jsou polynomy stupně nejvýše m–1.

Př.

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

$$|A - \lambda E| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \overbrace{4-\lambda}^{k_1} & \overbrace{-1}^{k_2} \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda).(2-\lambda)+1 = 8-4\lambda-2\lambda+\lambda^2+1 = \lambda^2-6\lambda+9 = (\lambda-3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 3$$

$\underline{\lambda_1 = 3:}$

$$\begin{aligned} k_1 - k_2 &= 0 \\ k_1 - k_2 &= 0 \\ \hline k_1 &= k_2 \end{aligned} \qquad {}^1\vec{y} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.e^{3x}$$

$\underline{\lambda_2 = 3:}$

$${}^2\vec{y} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1.x \\ b_0 + b_1.x \end{pmatrix}.e^{3x} = \begin{pmatrix} (a_0+a_1.x).e^{3x} \\ (b_0+b_1.x).e^{3x} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_1.e^{3x} + (a_0+a_1.x).3.e^{3x} = 4.(a_0+a_1.x).e^{3x} - (b_0+b_1.x).e^{3x} \\ y_2' &= b_1.e^{3x} + (b_0+b_1.x).3.e^{3x} = (a_0+a_1.x)e^{3x} + 2.(b_0+b_1.x).e^{3x} \end{aligned}\right| : e^{3x}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + a_1.x - (b_0+b_1.x) \\ b_1 &= a_0 + a_1.x - (b_0+b_1.x) \\ 0.x + a_1 &= (a_1-b_1).x + (a_0-b_0) \\ 0.x + b_1 &= (a_1-b_1).x + (a_0-b_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &= 0 \\ a_1 - b_1 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_0 - b_0 &= a_1 \\ a_0 - b_0 &= b_1 \end{aligned}$$

$$\boxed{a_1 = b_1 = 1} \qquad \begin{aligned} a_0 - b_0 &= 1 \\ a_0 - b_0 &= 1 \end{aligned} \qquad {}^2\vec{y} = \begin{pmatrix} 1+x \\ x \end{pmatrix}.e^{3x}$$

např. $\boxed{\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ a_0 &= 1 \end{aligned}}$

obecné řešení:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{y} = c_1.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.e^{3x} + c_2.\begin{pmatrix} x+1 \\ x \end{pmatrix}.e^{3x}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1.e^{3x} + c_2.(x+1).e^{3x} \\ y_2 &= c_1.e^{3x} + c_2.x.e^{3x} \end{aligned}$$

3. Charakteristická rovnice má imaginární kořeny (jednoduché)

Věta 3.6. Jestliže $\vec{y}(x) = \vec{u}(x) + i\vec{v}(x)$ je komplexní řešení soustavy $\vec{y}' = A.\vec{y}$, pak i $\vec{u}(x), \vec{v}(x)$ jsou **reálná** řešení této soustavy.

Důkaz: $\vec{y}' = \vec{u}' + i\vec{v}' = A.(\vec{u} + i\vec{v})$

$\vec{u}' + i\vec{v}' = A.\vec{u} + iA\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}' = A.\vec{u} \wedge \vec{v}' = A.\vec{v}$

Konkrétně: např. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

např. $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, pak odpovídající imaginární řešení je ${}^1\vec{Y} = \vec{k}.e^{(\alpha+\beta i).x}$

Eulerův vztah:

$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i.\sin\beta x$

$${}^1\vec{Y} = (\vec{r} + i\vec{s}).e^{\alpha x}.e^{i\beta x} = \Big(\underbrace{\vec{r}}_{a} + \underbrace{i\vec{s}}_{ib}\Big).e^{\alpha x}.\Big(\underbrace{\cos\beta x}_{c} + \underbrace{i.\sin\beta x}_{id}\Big) =$$

$$= \underbrace{e^{\alpha x}[\vec{r}.\cos\beta x - \vec{s}.\sin\beta x]}_{\boxed{u(x)= {}^1\vec{y}}} + i.\underbrace{e^{\alpha x}[\vec{r}.\sin\beta x + \vec{s}.\cos\beta x]}_{\boxed{v(x)= {}^2\vec{y}}}$$

Dále $\lambda_2 = \alpha - \beta i$:

$$^{2}\vec{Y} = (\vec{r} + i\vec{s}).e^{\alpha x}.e^{-i\beta x} = (\vec{r} + i\vec{s}).e^{\alpha x}.(\cos\beta x - i.\sin\beta x) =$$
$$= \underbrace{e^{\alpha x}.[\vec{r}.\cos\beta x - \vec{s}.\sin\beta x]}_{^{3}\vec{y} = {}^{1}\vec{y}} + i.\underbrace{e^{\alpha x}[-\vec{r}.\sin\beta x - \vec{s}.\cos\beta x]}_{^{4}\vec{y} = -{}^{2}\vec{y}}$$

<u>Př.</u>

$y_1' = y_1 + y_2$
$y_2' = -5y_1 - y_2$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda).(-1-\lambda) + 5 = -1 - \lambda + \lambda + \lambda^2 + 5 = \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 =$$
$$= 4$$

$\lambda_{1,2} = 0 \pm 2i$

<u>$\lambda_1 = 2i$:</u>

$(1-2i).k_1 + k_2 = 0$
$-5k_1 - (1+2i).k_2 = 0$

např. $k_1 = 1; k_2 = -1 + 2i$

$$^{1}\vec{Y} = \vec{k}.e^{\lambda x} = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{r}} + i.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{s}}\right]\overbrace{(\cos 2x + i.\sin 2x)}^{e^{i\beta x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cos 2x}_{^{1}\vec{y}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\cos 2x}_{^{2}\vec{y}}$$

obecné řešení: $\vec{y} = c_1.\ {}^{1}\vec{y} + c_2.\ {}^{2}\vec{y}$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= c_1.\cos 2x + c_2.\sin 2x \\ y_2 &= c_1(-\cos 2x - 2.\sin 2x) + c_2(-\sin 2x + 2.\cos 2x) \end{aligned}}$$

4. <u>Charakteristická rovnice má vícenásobné imaginární kořeny</u>
- řešíme podle bodů 2. a 3.

Řešení nehomogenní soustavy

Obecná metoda (i s funkčními koeficienty)

Obecná metoda přidružené homogenní soustavy

$\vec{y}_h$: $y_1 = c_1.\ {}^{1}y_1 + \cdots + c_n.\ {}^{n}y_1$
$y_2 = c_1.\ {}^{1}y_2 + \cdots + c_n.\ {}^{n}y_2$
$y_n = c_1.\ {}^{1}y_n + \cdots + c_n.\ {}^{n}y_n$

Partikulární řešení nehogenní soustavy hledáme ve tvaru:

!

$\vec{y}_p$: $y_1 = c_1(x).\ {}^{1}y_1 + \cdots + c_n(x).\ {}^{n}y_1$
$y_2 = c_1(x).\ {}^{1}y_2 + \cdots + c_n(x).\ {}^{n}y_2$
$y_n = c_1(x).\ {}^{1}y_n + \cdots + c_n(x).\ {}^{n}y_n$

Funkce derivujeme, dosadíme do nehogenní soustavy a rovnice upravíme na soustavu pro neznámé $c_1'(x), \ldots, c_n'(x)$, která má právě jediné řešení.

Integrací pak získáme funkce $c_1(x), \ldots, c_n(x)$, které dosadíme do vyjádření $\vec{y}_p$.

Př.

$y_1' = -2y_1 + y_2 - e^{2x}$
$y_2' = -3y_1 + 2y_2 + 6e^{2x}$

1.

$y_1' = -2y_1 + y_2$
$y_2' = -3y_1 + 2y_2$

charakteristická rovnice $\lambda_{1,2} = \pm 1$

$\vec{y}_h$: $y_1 = c_1. e^x + c_2. e^{-x}$
$y_2 = 3c_1. e^x + c_2. e^{-x}$

2.

$\vec{y}_p$: $y_1 = c_1(x). e^x + c_2(x). e^{-x}$
$y_2 = 3c_1(x). e^x + c_2(x). e^{-x}$

$$y_1' = c_1'(x). e^x + c_1(x). e^x + c_2'(x). e^{-x} - c_2(x). e^{-x} = \\ = -2(c_1(x). e^x + c_2(x). e^{-x}) + 3c_1(x). e^x + c_2(x). e^{-x} - e^{2x}$$

$$y_2' = 3. c_1'(x). e^x + 3. c_1(x). e^x + c_2'(x). e^{-x} - c_2(x). e^{-x} = \\ = -3(c_1(x). e^x + c_2(x). e^{-x}) + 2(3c_1(x). e^x + c_2(x). e^{-x}) + 6e^{2x}$$

$c_1'(x). e^x + c_2'(x). e^{-x} = -e^{2x}$
$3. c_1'(x). e^x + c_2'(x). e^{-x} = 6. e^{2x}$

$2. c_1'(x). e^x = 7. e^{2x}$

$$\boxed{c_1'(x) = \frac{7}{2}. e^x}$$

$$c_2'(x). e^{-x} = -e^{2x} - \frac{7}{2}. e^{2x}$$

$$\boxed{c_2'(x) = -\frac{9}{2}. e^{3x}}$$

$$c_1(x) = \frac{7}{2}\int e^x. dx = \boxed{\frac{7}{2}. e^x}$$

$$c_2(x) = -\frac{9}{2}\int e^{3x}. dx = -\frac{3}{2}. e^{3x}$$

$\vec{y}_p$: $y_1 = \frac{7}{2}. e^x. e^x - \frac{3}{2}. e^{3x}. e^{-x} = 2. e^{2x}$
$y_2 = \frac{21}{2}. e^{2x} - \frac{3}{2}. e^{3x}. e^{-x} = 9. e^{2x}$

$\vec{y} = \vec{y}_h + \vec{y}_p$