$y_1' = y_1 + y_2$
$y_2' = -5y_1 - y_2$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\vec{y}' = A.\vec{y}}$

$$ {}^1\vec{y}' = \begin{pmatrix} {}^1y_1 & = \cos 2x \\ {}^1y_2 & = -\cos 2x - 2\sin 2x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} {}^2y_1 & = \sin 2x \\ {}^2y_2 & = 2\cos 2x - \sin 2x \end{pmatrix}$$

obecné řešení $\vec{y} = c_1.\ {}^1\vec{y} + c_2.\ {}^2\vec{y}$

Soustavy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

Definice 3. 1.
$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + g_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + g_2(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{1n}(x)y_1 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + g_n(x) \end{aligned}$$

kde $a_{ij}(x); i, j = 1,2, \dots, n; g_i(x), i = 1, \dots, n$ jsou spojité funkce v $(a; b)$.

Je-li $\forall i = 1, \dots, n; g(x) = 0$ v $(a; b) \longrightarrow$ homogenní soustava.
Jinak $\longrightarrow$ nehomogenní soustava.

Maticový zápis

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{y}' = A.\vec{y} + \vec{g}}$$

Věta 3.2. Existuje právě jedno řešení homogenní soustavy v $(a; b)$, které splňuje počáteční podmínku $\vec{y}(x_0) = \vec{y_0}$, kde $x_0 \epsilon (a; b)$.

Věta 3.11. $\vec{y} = \vec{y_h} + \vec{y_p}$

partikulární řešení nehomogenní soustavy

obecné řešení nehomogenní soustavy

obecné řešení přidružené homogenní soustavy

Homogenní lineární soustavy

$\vec{y}' = A(x).\vec{y}$

Poznámka:

$c_1.\ {}^1\vec{y} + c_2.\ {}^1\vec{y} + \cdots + c_n.\ {}^n\vec{y} = \vec{0}$
Platí-li v $(a; b)$ pouze když $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, pak řešení soustavy ${}^1\vec{y};\ {}^2\vec{y}; \dots;\ {}^n\vec{y}$ jsou lineárně nezávislá v $(a; b)$.
Jinak říkáme, že tato řešení jsou lineárně závislá v $(a; b)$.

Pak jednodušší rozhodování o lineární závislosti řešení zavádíme tzv. *Wronského* determinant (*wronskián*).

$$\forall x \in (a;b);\ \begin{matrix} W(x) = 0 \Rightarrow \text{lin. závislá řešení} \\ W(x) \neq 0 \Rightarrow \text{lin. nezávislá řešení} \end{matrix}\ v\ (a;b)$$

Věta 3.4.

$$W(x) = \begin{vmatrix} {}^1y_1 & {}^2y_1 & {}^ny_1 \\ {}^1y_2 & {}^2y_2 & {}^ny_2 \\ \vdots & & \\ {}^1y_n & {}^2y_n & {}^ny_n \end{vmatrix} \Rightarrow W(x) = \begin{pmatrix} {}^1\vec{y} & {}^2\vec{y} & \cdots & {}^n\vec{y} \end{pmatrix}$$

Př.

$$W = \begin{vmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \cos 2x \\ -\cos 2x - 2\sin 2x \end{matrix}}_{{}^1\vec{y}} & \underbrace{\begin{matrix} \sin 2x \\ 2\cos 2x - \sin 2x \end{matrix}}_{{}^2\vec{y}} \end{vmatrix} =$$

lin. nezávislé řešení soustavy v $(-\infty; +\infty)$

$$= 2\cos^2 2x - \cos 2x \sin 2x + \cos 2x \sin 2x + 2\sin^2 2x = 2 \neq 0$$

Definice 3.3. Systém n lineárně nezávislých řešení homogenní soustavy v $(a;b)$ nazvanou fundamentálním systémem řešení.

Věta 3.5. Každé partikulární řešení soustavy $\vec{y}' = A.\vec{y}$ lze v $(a;b)$ vyjádřit ve tvaru
! $\vec{y} = c_1.\ {}^1\vec{y} + c_2.\ {}^2\vec{y} + \cdots + c_n.\ {}^n\vec{y}$, kde ${}^1\vec{y};\ {}^2\vec{y};\ {}^n\vec{y}$ tvoří fundamentální systém řešení v $(a;b)$.

Důkaz: Ukážeme, že každé řešení je v obecném zápise obsaženo.

Homogenní soustavy s konstantními koeficienty

$\forall i, j = 1, \dots, n;\ a_{ij}(x)$ je konstanta

Eulerova metoda

$$\vec{y}' = A.\vec{y}$$

Řešení soustavy do fundamentálního systému hledáme ve tvaru $\vec{y} = \vec{k}.e^{\lambda x}$, tzn.

$$\begin{matrix} y_1 = k_1.e^{\lambda x} \\ \cdots \\ y_n = k_n.e^{\lambda x} \end{matrix} \qquad k_1, \dots, k_n - \text{ konstanty}, \lambda - \text{parametr}$$

Zderivujeme $\vec{y}' = \vec{k}.e^{\lambda x}.\lambda$ a dosadíme do zadání $\vec{k}.\lambda.e^{\lambda x} = A.\vec{k}.e^{\lambda x}\ |: e^{\lambda x}$

$$\lambda.\vec{k} = A.\vec{k}$$

E=jednotková matice stejného typu jako A

$$\boxed{(A - \lambda.E).\vec{k} = \vec{0}}$$

Rozepsáním dostaneme:

$$\begin{matrix} k_1.\lambda.e^{\lambda x} = a_{11}.k_1.e^{\lambda x} + \cdots + a_{1n}.k_n.e^{\lambda x} \\ k_2.\lambda.e^{\lambda x} = a_{21}.k_1.e^{\lambda x} + \cdots + a_{2n}.k_n.e^{\lambda x} \\ \vdots \\ k_n.\lambda.e^{\lambda x} = a_{n1}.k_1.e^{\lambda x} + \cdots + a_{nn}.k_n.e^{\lambda x} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} (a_{11} - \lambda).k_1 + \cdots + a_{1n}.k_n = 0 \\ a_{21} + (a_{22} - \lambda).k_2 + \cdots + a_{2n}.k_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}.k_1 + \cdots + (a_{nn} - \lambda).k_n = 0 \end{matrix} \quad (*)$$

Homogenní soustava (*) s neznámými $k_1, k_2, \dots, k_n$ má vždy triviální řešení $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$. Tomu odpovídá řešení $\vec{y} = \vec{0}$, které nelze zařadit do fundamentálního systému. Proto musí hodnoty λ být takové, aby soustava (*) měla nekonečně mnoho řešení. To nastane, když $\det(A - \lambda.E) = 0$ což je tzv. charakteristická rovnice soustavy, tedy algebraická rovnice stupně n. To má v C (obor komplexních čísel) n kořenů →vlastní (charakteristické) číslo matice A. Každému vlastnímu číslu lze přiřadit nekonečně mnoho vlastních (charakteristických) vektorů $\vec{k}$. Jeden z nich zvolíme a s příslušnou hodnotou λ dosadíme do $\vec{y} = \vec{k}.e^{\lambda x}$, čímž získáme řešení do fundamentálního systému.

Sestavíme obecné řešení $\vec{y} = c_1.\ {}^1\vec{y} + \cdots + c_n.\ {}^n\vec{y}$

Př.

1. Vlastní čísla jsou různá reálná čísla

vlastní čísla: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
vlastní vektory: ${}^1\vec{k}, \dots, {}^n\vec{k}$
obecné řešení: $\vec{y} = c_1.\ {}^1\vec{k}.e^{\lambda_1 x} + \cdots c_n.\ {}^n\vec{k}.e^{\lambda_n x}$

$$\begin{array}{llll} y_1' = & -3y_1 & +4y_2 & -2y_3 \\ y_2' = & +y_1 & & +y_3 \\ y_3' = & 6y_1 & -6y_2 & +5y_3 \end{array} \qquad \vec{y} = \vec{k}.e^{\lambda x} \quad \begin{array}{l} y_1 = k_1.e^{\lambda x} \\ y_2 = k_2.e^{\lambda x} \\ y_3 = k_3.e^{\lambda x} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} y_1' = k_1.\lambda.e^{\lambda x} = -3k_1.e^{\lambda x} & +4k_2.e^{\lambda x} & -2k_3.e^{\lambda x} & \\ y_2' = k_2.\lambda.e^{\lambda x} = \ k_1.e^{\lambda x} & & +k_3.e^{\lambda x} & |:e^{\lambda x} \\ y_3' = k_3.\lambda.e^{\lambda x} = \ 6k_1.e^{\lambda x} & -6k_2.e^{\lambda x} & +5k_3.e^{\lambda x} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrl} (-3-\lambda).k_1 & +4k_2 & -2k_3 = 0 & \\ k_1 & -\lambda k_2 & +k_3 = 0 & (*) \\ 6k_1 & -6k_2 & (5-\lambda).k_3 = 0 & \end{array}$$

charakteristická rovnice $\det(A - \lambda.E) = 0$

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 6 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (-3-\lambda).(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 4.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5-\lambda \end{vmatrix} + (-2).(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 6 & -6 \end{vmatrix} =$$
$$= (-3-\lambda).(-5\lambda + \lambda^2 + 6) - 4.(5 - \lambda - 6) - 2.(-6 + 6\lambda) =$$
$$= 15\lambda - 3\lambda^2 - 18 + 5\lambda^2 - \lambda^3 - 6\lambda + 4 + 4\lambda + 12 - 12\lambda = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$
$$\lambda^2.(\lambda - 2) - (\lambda - 2) = 0$$
$$(\lambda - 2).(\lambda - 1).(\lambda + 1) = 0$$
$$\lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = 1,\ \ \lambda_3 = -1$$

$\underline{\lambda_1 = 2}$: $-5k_1 + 4k_2 - 2k_3 = 0$
$k_1 - 2k_2 + k_3 = 0\ |.2$
$\underline{6k_1 - 6k_2 + 3k_3 = 0}$

$-3k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = 0$
$k_3 = 2k_2$, např. $k_2 = t, k_3 = 2t$
$(k_1; k_2; k_3) = (0; t; 2t); t \epsilon R$
volíme $t = 1 \Rightarrow\ {}^1\vec{y} = (0; 1; 2).e^{2x}$