1.

f je lichá funkce v $\langle -\pi;\pi\rangle \Rightarrow \begin{matrix} f(x)\cos nx \text{ je lichá funkce} \\ f(x)\sin nx \text{ je sudá dunkce} \end{matrix}$ v $\langle -\pi;\pi\rangle$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0;\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0;\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

F. řada je sinová v $\langle -\pi;\pi\rangle$

2.

f je sudá funkce v $\langle -\pi;\pi\rangle \Rightarrow \begin{matrix} f(x)\cos nx \text{ je sudá funkce} \\ f(x)\sin nx \text{ je lichá funkce} \end{matrix}$ v $\langle -\pi;\pi\rangle$

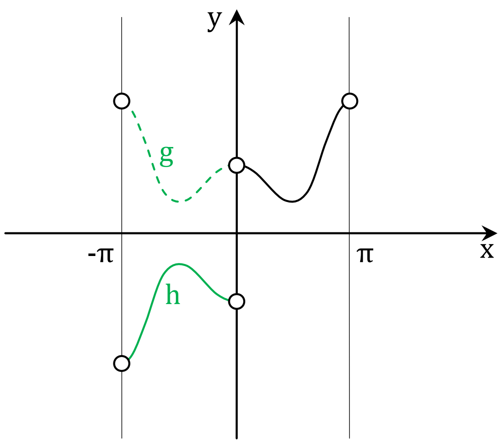
$b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx;\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

F. řada je kosinová v $\langle -\pi;\pi\rangle$

Rozvoj funkce v sinovou a kosinovou F. řadu v (0;π)

1. Rozvoj v sinovou řadu



liché rozšíření funkce f na (-π;π)

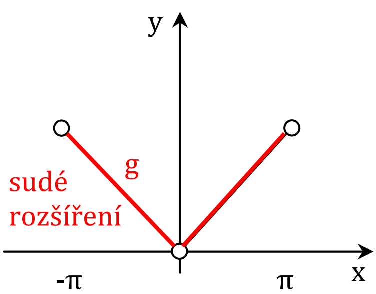
$h(x) = f(x);\ x\epsilon(0;\pi)$
$h(x) = -f(-x); x\epsilon(-\pi;0)$

2. Rozvoj v kosinovou řadu

sudé rozšíření funkce f na (-π;π)

$g(x) = f(x); x\epsilon(0;\pi)$
$g(x) = f(-x); x\epsilon(-\pi;0)$

<u>Př.</u> Rozviňte funkci f(x)=x v (0;π) v kosinovou F. řadu



$b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x.\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}.\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$\boxed{u' = 1, v = \frac{\sin nx}{n}}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \overset{u}{x}.\overset{v'}{\cos nx}\,dx = \frac{2}{\pi}\left\{\left[x.\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx\right\} = -\frac{2}{\pi n}\left\{\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}[\cos n\pi - \cos 0] = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0, \text{n je sudé} \\ \dfrac{-4}{\pi n^2}, \text{n je liché} \end{cases}$$

$n = 2k - 1 \qquad k = 1; 2; 3; \ldots$

$$a_{2k-1} = \frac{-4}{\pi(2k-1)^2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x \quad \text{v } (0; \pi)$$

Jde o rozvoj periodického pokračování funkce g v $(-\infty;+\infty)$

Využití k určení součtu číselné řady

Např. pro x=0 dostáváme:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

Poznámka: Při rozvoji funkce f ve F. řadu v libovolném intervalu délky 2π, např. v $\langle a - \pi; a + \pi\rangle$ platí vztahy:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{a-\pi}^{a+\pi} f(x)dx\,;\, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{a-\pi}^{a+\pi} f(x)\cos nx\,dx\,;\, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{a-\pi}^{a+\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

Rozvoj funkce f na intervalu ⟨–l,l⟩; l>0

interval délky 2l=perioda; l=půlperioda

Pak F. řada má tvar

$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\frac{\pi}{l}x + b_n \sin n\frac{\pi}{l}x\right)$, protože systém $\left\{1; \cos n\frac{\pi}{l}x\,; \sin n\frac{\pi}{l}x\right\}$ je ortogonální systém v ⟨–l;l⟩

Pro koeficienty platí:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx\,;\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx\,;\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,dx$$

Důkaz: např. pro a_n

subst. $\frac{\pi}{l}x = t \Rightarrow x = \frac{l}{\pi}t$

$x\epsilon\langle -l; l\rangle \Leftrightarrow t\epsilon\langle -\pi; \pi\rangle$

$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = g(t)$

$dt = \frac{\pi}{l}dx$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} g\left(\frac{\pi}{l}t\right)\cos\left(n\frac{\pi}{l}x\right)\frac{\pi}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f\left(\frac{l}{\pi}.\frac{\pi}{l}x\right)\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx =$$

$$= \boxed{\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx}$$

Poznámka: Při rozvoji funkce f ve F. řadu v libovolném intervalu délky 2l, např. ⟨a-l;a+l⟩, platí stejné vztahy jen integrační meze se změní na a-l, a+l.

Rozvoj funkce f v kosinovou nebo sinovou F. řadu v $(0; l)$

Používáme vztahy:

1. pro sinovou F. řadu

$$a_0 = a_n = 0; b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,dx$$

2. pro kosinovou F. řadu

$b_n = 0$

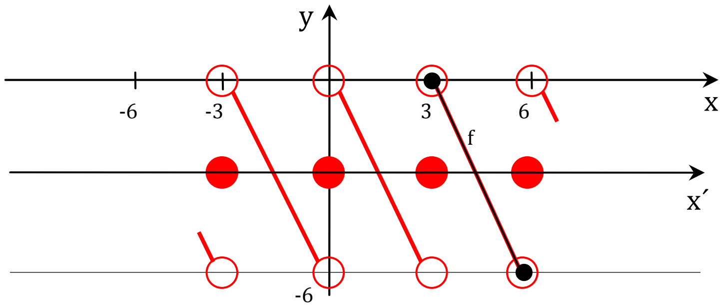
$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx\,;\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx$$

Shrnutí: **Věta 2.9.** Nechť funkce f a f´ jsou po částech spojité v $\langle a - l; a + l\rangle$ nebo tam funkce f splňuje Dirichletovy podmínky. Pak její periodické prodloužení $\bar{f}$ je funkce rozvinutá v (-∞;+∞) ve F. řadu tvaru:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{\pi}{l}x + b_n\sin n\frac{\pi}{l}x\right)$$

Př. Rozviňte funkci f(x)=6-2x ve F. řadu v intervalu ⟨3;6⟩.

$2l = 6 - 3 = 3 \Rightarrow l = \frac{3}{2}$



$\bar{f}(-3) = -3$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{a-l}^{a+l} 6-2x\,dx = \frac{1}{\frac{3}{2}}\int_3^6 6-2x\,dx = \frac{2}{3}\left[6x-x^2\right]_3^6 = \frac{2}{3}(36-36-18+9) = \boxed{-6}$$

$$u' = -2, v = \frac{\sin n\frac{2\pi}{3}x}{n\frac{2\pi}{3}}$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{3}{2}}\int_3^6 (6-2x)\cos n\frac{\pi}{\frac{3}{2}}x\,dx = \frac{2}{3}\int_3^6 \overbrace{(6-2x)}^{u}\,\overbrace{\cos n\frac{2\pi}{3}x}^{v'}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\left[(6-2x).\frac{3}{2\pi n}.\sin n\frac{2\pi}{3}x\right]_3^6 + \frac{6}{2\pi n}\int_3^6 \sin n\frac{2\pi}{3}x\,dx\right\} = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{-\cos n\frac{2\pi}{3}x}{n\frac{2\pi}{3}}\right]_3^6 =$$

$$= -\frac{3}{n^2\pi^2}\left[\underbrace{\cos 4n\pi}_{0} - \underbrace{\cos 2n\pi}_{0}\right] = \boxed{0}$$

$$u' = -2, v = \frac{-\cos n\frac{2\pi}{3}x}{n\frac{2\pi}{3}}$$

$$b_n = \frac{1}{\frac{3}{2}}\int_3^6 \overbrace{(6-2x)}^{u}\,\overbrace{\sin nx}^{v'}\,dx = \frac{2}{3}\left\{\left[-(6-2x).\frac{3}{2\pi n}\cos n\frac{2\pi}{3}x\right]_3^6 - \frac{3}{n\pi}\int_3^6 \cos n\frac{2\pi}{3}x\,dx\right\} =$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\frac{9}{\pi n} - 0 - \frac{3}{2\pi}\underbrace{\left[\frac{\sin n\frac{2\pi}{3}x}{n\frac{2\pi}{3}}\right]_3^6}_{0}\right\} = \frac{6}{\pi n}$$

$$6-2x = -3 + \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\frac{2\pi}{3}x}{n}\right) \text{ v } \langle 3; 6\rangle$$

2. **Soustavy (obyčejných) diferenciálních rovnic**

Eliminační metoda

Př. Řešte soustavu dif. rovnic

$$\begin{array}{ll} y_1' = y_1 + y_2 & y_2 = y_1' - y_1 \\ y_2' = -5y_1 - y_2 & y_2' = y_1'' - y_1' \end{array}$$

$y_1'' - y_1' = -5y_1' - y_1' + y_1$

$y_1'' + 4y_1 = 0$ – homogenní lineární dif. rovnice 2. řádu s konst. koeficienty

Hledáme řešení do fundamentálního systému řešení ve tvaru:

$y_1 = e^{\lambda x}, y_1' = \lambda e^{\lambda x}, y_1'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$\lambda^2 e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} = 0$

$\lambda^2 + 4 = 0$ – charakteristická rovnice

$\lambda_{1,2} = \pm 2i \rightarrow Y = e^{2ix} \Rightarrow \begin{array}{l} {}^1y_1 = \cos 2x \\ {}^2y_2 = \sin 2x \end{array}$

$y_1 = c_1\,{}^1y_1 + c_2\,{}^2y_2 = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

obecné řešení
$y_2 = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x - c_1 \cos 2x - c_2 \sin 2x$

$\underline{y_2 = c_1(-2 \sin 2x - \cos 2x) + c_2(2 \cos 2x - \sin 2x)}$

počáteční podmínky:
$y_1(0) = 2$
$y_2(0) = -4$

partikulární řešení:
$2 = c_1$
$-4 = -c_1 + 2c_2 \Rightarrow c_2 = -1$

a dosadíme za c_1, c_2 do obecného řešení.