Věta 5.5. (o první derivaci vzoru)
$\mathcal{L}\{f'(x)\} = p.L(p) - f(0_+)$

Věta 5.6. (o n-té derivaci vzoru)
$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = p^n.L(p) - p^{n-1}f(0_+) - p^{n-2}f'(0_+) - \cdots - pf^{(n-2)}(0_+) - f^{(n-1)}(0_+)$

Věta 5.7. (o integrálu vzoru)
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(u).du\right\} = \frac{L(p)}{p}$$

Věta 5.8. (o derivaci obrazu)
$$\mathcal{L}\{-x.f(x)\} = L'(p) = \frac{dL}{dp}$$

<u>Př.</u>
$$\mathcal{L}\{x.e^{ax}\} = \frac{1}{(p-a)^2}$$
$$\mathcal{L}\{e^{ax}\} = \frac{1}{p-a} = L(p)$$
$$\mathcal{L}\{-x.e^{ax}\} = -\frac{1}{(p-a)^2} = L'(p)$$

nebo:
$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{p^2} = L(p)$$
$$\mathcal{L}\{x.e^{ax}\} = L(p-a) = \frac{1}{(p-a)^2}$$

!!

Laplaceovy obrazy dalších funkcí

1. $\mathcal{L}\{x\} = \dfrac{1}{p^2}$

$$\mathcal{L}\{x\} = \int_0^{+\infty} \overset{u}{x}.\overbrace{e^{-px}}^{v'}.dx = -\frac{1}{p}\left[x.e^{-px}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p}.\underbrace{\int_0^{+\infty} 1.e^{-px}.dx}_{\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{p}} = -\frac{1}{p}\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{px}} - 0\right] + \frac{1}{p^2} =$$

$u' = 1 \quad v = -\frac{1}{p}e^{-px}$

$$= -\frac{1}{p}\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{p.e^{px}}}_{\to 0} + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}$$

2. $\mathcal{L}\{x^n\} = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$, n je celé nezáporné číslo → důkaz indukcí

speciálně: $n = 0: \mathcal{L}\{x^0\} = \mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{p}$

$n = 1: \mathcal{L}\{x^1\} = \mathcal{L}\{x\} = \dfrac{1}{p^2}$

3. $\mathcal{L}\{\cos x\} = \dfrac{p}{p^2+1}$ $\qquad \mathcal{L}\{\sin x\} = \dfrac{1}{p^2+1}$

$$\mathcal{L}\{e^{ix}\} = \frac{1}{p-i}.\frac{p+i}{p+i} = \underbrace{\frac{p}{p^2+1}}_{\cos x} + i.\underbrace{\frac{1}{p^2+1}}_{\sin x}$$

$\mathcal{L}\{\cos x + i.\sin x\} = \mathcal{L}\{\cos x\} + i.\mathcal{L}\{\sin x\}$

obecně: $\mathcal{L}\{\cos ax\} = \dfrac{p}{p^2+a^2} \qquad \mathcal{L}\{\sin ax\} = \dfrac{a}{p^2+a^2}$

Např.:

$\mathcal{L}\{\sin x\} = L(p)$

$$\mathcal{L}\{\sin ax\} = \frac{1}{a}.L\left(\frac{p}{a}\right) = \frac{1}{a}.\frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a.\frac{p^2+a^2}{a^2}} = \frac{a}{p^2+a^2}$$

4. $\mathcal{L}\{\cosh ax\} = \dfrac{p}{p^2-a^2} \qquad \mathcal{L}\{\sinh x\} = \dfrac{a}{p^2-a^2}$

Např.: $\mathcal{L}\{\cosh ax\} = \mathcal{L}\left\{\dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right\} = \dfrac{1}{2}(\mathcal{L}\{e^{ax}\} + \mathcal{L}\{e^{-ax}\}) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p+a}\right) =$

$$= \frac{1}{2}.\left(\frac{p+a+p-a}{p^2-a^2}\right) = \frac{p}{p^2-a^2}$$

Zpětná Laplaceova transformace

$\mathcal{L}\{f(x)\} = L(p) \qquad \mathcal{L}^{-1}\{L(p)\} = f(x)$

Definice 5. 2. $f_1(x) * f_2(x) = \displaystyle\int_0^x f_1(x).f_2(x-u).du$ – konvoluce funkcí

Věta 5.9. (o vlastnostech konvoluce)

5. **Borelův vzorec** $\mathcal{L}\{f_1(x) * f_2(x)\} = \mathcal{L}\{f_1(x)\}.\mathcal{L}\{f_2(x)\} = L_1(p).L_2(p)$

neboli: $\mathcal{L}^{-1}\{L_1(p).L_2(p)\} = f_1(x) * f_2(x)$

Omezíme se pouze na hledání vzorů k ryze lomeným racionálním funkcím.

Dvě metody:

1. Užití konvoluce funkcí
2. Rozklad na parciální zlomky

Př.

1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p.(p^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p}.\dfrac{1}{p^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p^2+1}\right\} = 1 * \sin x =$

$$= \int_0^x 1.\sin(x-u).du = \left[-\frac{\cos(x-u)}{-1}\right]_0^x = 1 - \cos x$$

nebo: $\sin x * 1 = \displaystyle\int_0^x \sin u.1.du = [-\cos u]_0^x = -\cos x + 1$

2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p.(p^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p} - \dfrac{p}{p^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{p}{p^2+1}\right\} = 1 - \cos x$

$$\frac{1}{p.(p^2+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B.p+C}{p^2+1} = \frac{A.(p^2+1)+(B.p+C).p}{p.(p^2+1)} = \begin{array}{l} A+B=0 \Rightarrow B=-1 \\ C=0 \\ A=1 \end{array}$$

Užití Laplaceovy transformace při řešení funkčních rovnic

1. Řešení diferenciálních rovnic a jejich soustav

Př.
$y'' + 4y = \cos x, y(0) = y'(0) = 0$

a)
$$\mathcal{L}\{y\} = Y, \mathcal{L}\{y''\} = p^2Y - p.y(0_+) - y'(0_+) = p^2Y$$
$$\mathcal{L}\{\cos x\} = \frac{p}{p^2+1}$$

b)
$$p^2Y + 4.Y = \frac{p}{p^2+1}$$
$$Y.(p^2+4) = \frac{p}{p^2+1}$$
$$Y = \frac{p}{(p^2+1).(p^2+4)}$$

c)
$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+1).(p^2+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{3}p}{p^2+1} - \frac{\frac{1}{3}p}{p^2+4}\right\} =$$
$$= \frac{1}{3}.\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+1}\right\} - \frac{1}{3}.\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+2^2}\right\} = \frac{1}{3}.\cos x - \frac{1}{3}.\cos 2x$$

2. Řešení integrálních a integrodiferenciálních rovnic

Integrální rovnice:
$$y(x) = f(x) + \int_a^\alpha \underbrace{g(x;u)}_{\text{Jádro integrální rovnice}}.y(u).du$$

Jádro integrální rovnice

α je reálná konstanta – rovnice **Fredholmova** typu
$\alpha = x$ – rovnice **Volterova** typu

často bývá $g(x;u) = g(x-u)$

Př.
$$A.\ y(x) = e^{-x} + 3.\int_0^x \sinh(x-u).y(u).du$$

a)
$$\mathcal{L}\{y\} = Y, \mathcal{L}\{e^{-x}\} = \frac{1}{p+1}, \mathcal{L}\left\{\int_0^x \sinh(x-u) * y(x)\right\} = \mathcal{L}\{\sinh x\}.\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{p^2-1}.Y$$

b)

$$Y = \frac{1}{p+1} + \frac{3.1}{p^2-1}.Y \ \ |.(p^2-1)$$

$$(p^2-1)Y - 3.Y = p - 1$$

$$(p^4-4).Y = p - 1$$

$$Y = \frac{p-1}{p^2-4}$$

c)

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2-2^2}\right\} - \frac{1}{2}.\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p^2-2^2}\right\}$$

$$y = \cosh x - \frac{1}{2}\sinh x$$

$$B.\ y' + 6y + 9.\int_0^x y(u).du = 0, y(0) = 1$$

a)

$$\mathcal{L}\{y\} = Y, \mathcal{L}\{y'\} = p.Y - y(0_+) = p.Y - 1, \mathcal{L}\left\{\int_0^x y(u).du\right\} = \frac{Y}{p}$$

b)

$$p.Y - 1 + 6.Y + 9.\frac{Y}{p} = 0 \ \ |.p$$

$$p^2.Y - p + 6.Y.p + 9Y = 0$$

$$Y.(p^2 + 6p + 9) = p$$

$$Y = \frac{p}{(p+3)^2}$$

c)

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+3-3}{(p+3)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+3} - \frac{3}{(p+3)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+3}\right\} - 3.\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+3)^2}\right\} =$$
$$= e^{-3x} - 3.x.e^{-3x}$$

Laplace-Carsova transformace

$$F(p) = p.\int_0^{+\infty} f(x).e^{-px}.dx$$

$$\text{např.}: F\{1\} = p.\frac{1}{p} = 1$$

5. Základy numerické matematiky

Numerické řešení diferenciálních rovnic

Metody:

- analytické
  - exaktní
  - přibližné
    - užití Taylorových rozvojů
    - užití postupných aproximací

neznámá funkce (řešení) je vyjádřena předpisem

- numerické – určení hodnot neznámé funkce v předem daných bodech

Řešení diferenciálních rovnic ve tvaru Taylorovy řady

Taylorova řada $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \frac{\varphi'(x)}{1!}.(x - x_0) + \frac{\varphi''(x)}{2!}.(x - x_0)^2 + \cdots$

Uvažujeme diferenciální rovnice $y' = f(x; y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$.

partikulární řešení $\varphi(x)$

$\varphi(x_0) = y_0 \quad \varphi'(x) = f(x_0; y_0)$

$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.y' \Rightarrow \varphi''(x) = \cdots$

atd.

<u>Př.</u> Určete až čtvrtého stupně členy Taylorova rozvoje partikulárního řešení diferenciální rovnice $y'' + 3xy' - 1 = 0$, které splňuje počáteční podmínky $\begin{matrix} y(1) = -1 \\ y'(1) = 2 \end{matrix}$

$x_0 = 1$:

$\varphi(x) \doteq -1 + \frac{2}{1!}(x - 1) - \frac{5}{2!}(x - 1)^2 + \frac{9}{3!}(x - 1)^3 + \frac{3}{4!}(x - 1)^4$

$y'' = -3xy' + 1 \Rightarrow y''(1) = \varphi''(1) = -3.1.2 + 1 = -5$

$y''' = -3y' - 3xy'' \Rightarrow \varphi'''(1) = y'''(1) = -3.2 - 3.1.(-5) = 9$

$y^{(4)} = -3y'' - 3y'' - 3xy''' \Rightarrow \varphi^{(4)}(1) = y^{(4)}(1) = -3.(-5) - 3.(-5) - 3.1.9 = 3$