Výpočet integrálu z primitivní funkce (**Věta 4.29.**)

$\gamma: z = z(t), t \epsilon \langle \alpha; \beta \rangle, z_1 = z(\alpha), z_2 = z(\beta)$

Protože $F'(z) = f(z)$, je $\dfrac{dF(z(t))}{dt} = \dfrac{dF}{dz} . \dfrac{dz}{dt} = f(z(t))z'(t)$

$$\int_\gamma f(z).dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t).dt = \int_\alpha^\beta \frac{dF}{dt}.dt = \left[F(z(t))\right]_\alpha^\beta = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)) = F(z_2) - F(z_1)$$

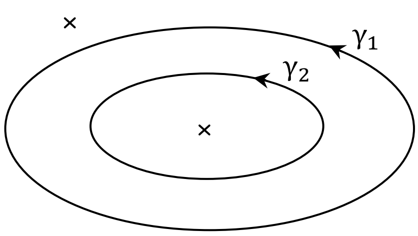
<u>Př.</u>

$$\int_\gamma z.dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1+i} = \frac{1}{2}(1+i)^2 = i$$

$z_1 = 0, z_2 = 1 + i$

Funkce $f(z) = z$ je holomorfní v C $\Rightarrow F(z) = \dfrac{z^2}{2}$

2. Princip deformace křivky (**Věta 4.27.**)



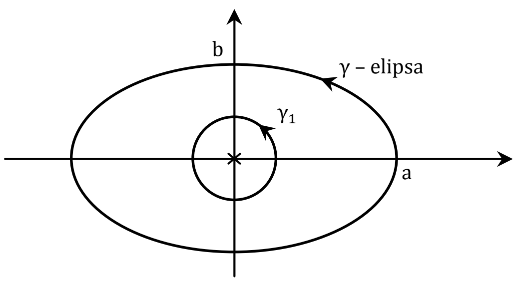

funkce je holomorfní v oblasti obsahující křivky $\gamma_1, \gamma_2$ i oblast mezi nimi.

Pak $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z).dz = \int_{\gamma_2} f(z).dz$

Singulární body – není v nich holomorfní, leží uvnitř $\gamma_2$ a vně $\gamma_1$.

<u>Př.</u>

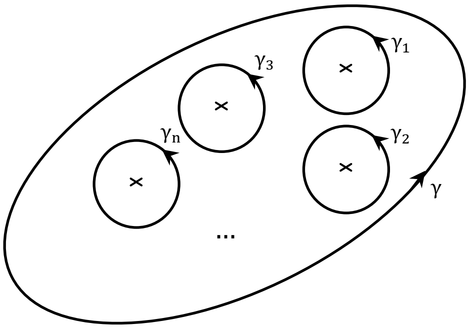
$$\int_\gamma \frac{1}{z}.dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z}.dz = 2\pi i$$




$\gamma_1$ – kružnice

singulární bod funkce $f(z) = \frac{1}{z}$ je $z = 0$ (leží uvnitř $\gamma_1$)

3. Zobecnění principu deformace křivky (**Věta 4.28.**)




Singulární body funkce f leží uvnitř křivek $\gamma_1; \gamma_2; \gamma_3; \ldots; \gamma_n$ nebo vně $\gamma$.

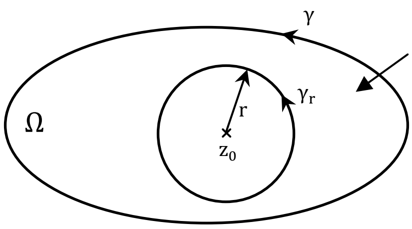
$$\int_\gamma f(z).\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z).\,dz$$

## Cauchyův integrační vzorec (**Věta 4.30.**)

Nechť f je holomorfní na jednoduše souvislé oblasti $\Omega$ a na její hraniční křivce $\gamma$ je konečná a spojitá.

Pak pro libovolné $z_0 \epsilon \Omega$ platí $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}.\,dz$

kladně orientovaná




f je holomorfní

Princip důkazu:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}.\,dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0}.\,dz = \underbrace{\int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.\,dz}_{\text{dá se dokázat}=0} + \int_{\gamma_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}.\,dz = f(z_0).\int_{\gamma_r} \frac{1}{z-z_0}.\,dz = 2\pi i.\,f(z_0)$$

<u>Př.</u>

$$\int_\gamma \frac{z+3}{z^2-1}.\,dz = \int_\gamma \frac{z+3}{(z-1).(z+1)}.\,dz =^{*}$$

singulární body $z_1 = 1, z_2 = -1$

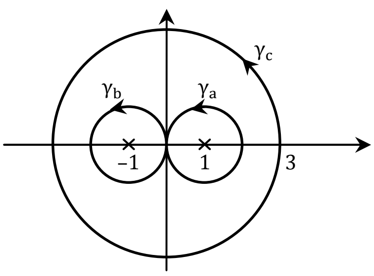
a) $\gamma_a = |z-1| = 1$

b) $\gamma_b = |z+1| = 1$

c) $\gamma_c = |z| = 3$

c) zobecněný princip deformace křivky

$$\int_{\gamma_c} = \int_{\gamma_a} + \int_{\gamma_b} = 4\pi i - 2\pi i = 2\pi i$$




a) $\displaystyle\int_{\gamma_a} \frac{\frac{z+3}{z+1}}{z-1}.\,dz = 2\pi i.\,f(1) = 2\pi i.\,2 = 4\pi i$

$z_0 = 1, f(z) = \dfrac{z+3}{z+1}$

b) $\displaystyle\int_{\gamma_b} \frac{\frac{z+3}{z-1}}{z+1}.\,dz = 2\pi i.\,f(-1) = -2\pi i$

$z_0 = -1, f(z) = \dfrac{z+3}{z-1}$

## Zobecněný Cauchyův integrační vzorec (Věta 4.31.)

Za stejných předpokladů jako ve **Větě 3.10.** platí:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \cdot dz$$

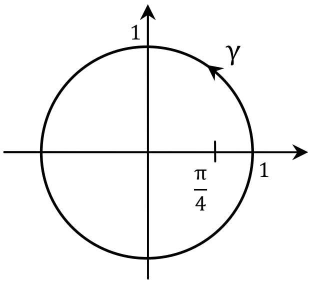
pro $n = 0$ dostáváme Cauchyův vzorec.

$$n = 1: \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \cdot dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot f'(z_0) \text{ atd.}$$

<u>Př.</u>

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{tg} z}{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2} \cdot dz = \frac{2\pi i}{2!} \cdot f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi i \cdot \frac{2 \cdot \sin \frac{\pi}{4}}{\cos^3 \frac{\pi}{4}} = 2\pi i \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3} = 4\pi i$$

$$\gamma: |z| = 1, z_0 = \frac{\pi}{4}, n = 2$$

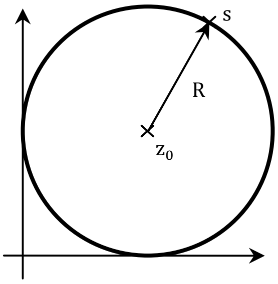



$$f'(z) = \frac{1}{\cos^2 z} = \cos^{-2} z \Rightarrow f''(z) = 2 \cdot \cos^{-3} z \cdot (-\sin z) = \frac{2 \cdot \sin z}{\cos^3 z}$$

$f(z) = \operatorname{tg} z$ – není definována v $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ mimo křivku $\Rightarrow$ v pořádku

## Taylorovy rozvoje funkcí komplexní proměnné

Funkce $f(z)$, $z_0$ – střed řady, $s$ – singulární bod nejbližší k $z_0$



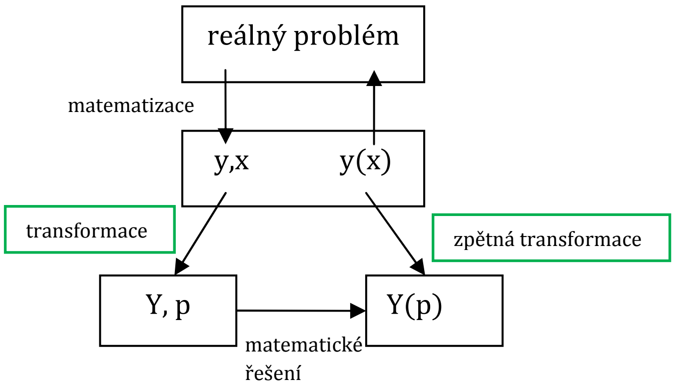

$R = |s - z_0|$ – poloměr kružnice

Holomorfní funkce $f$ je uvnitř této kružnice jednoznačně rozvinutelná v Taylorovu řadu se středem v bodě $z_0$.

$$\text{Konkrétně } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n$$

$z_0 = 0$: Maclaurinova řada

# Integrální transformace




$$f(x) \to F(p) = \int_a^b f(x).K(p;x).dx$$

K(p; x) – jádro transformace

# 4. Laplaceova transformace

$$\underbrace{\mathcal{L}\{f(x)\}}_{\text{vzor}} = \underbrace{L(p)}_{\text{obraz}} = \int_0^{+\infty} f(x).e^{-px}.dx$$

K jakým funkcím existuje Laplaceův obraz?

**Definice 5.1.** f se nazývá časová funkce, jestliže:

1. $\forall x < 0; f(x) = 0$
2. f je po částech spojitá v každém konečném (omezeném) intervalu
3. f je exponenciálního řádu α, tzn.:

$\exists M > 0;\ \exists \alpha \epsilon R;\ \forall x \geq 0; |f(x)| \leq M.e^{\alpha x}$

Pro každou časovou funkci existuje Laplaceův obraz.

<u>Př.</u>

1. $f(x) = e^{5x} = 1.e^{5x};\ M = 1;\ \alpha = 5$

2. $f(x) = 1 = 1.e^{0x};\ M = 1; \alpha = 0$

3. $f(x) = x \quad M = 1;\ \alpha = 1$

$$e^{1x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots > x \text{ pro } \forall x \geq 0$$

stejně pro každou funkci $f(x) = x^n; n\epsilon N$

Např. $f(x) = e^{x^2}$ nemá Laplaceův obraz!!!

Poznámka:

1. $\int_0^{+\infty} f(x).dx = [F(x)]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(0_+)$

Je-li F spojitá zprava v 0, pak $F(0_+) = F(0)$

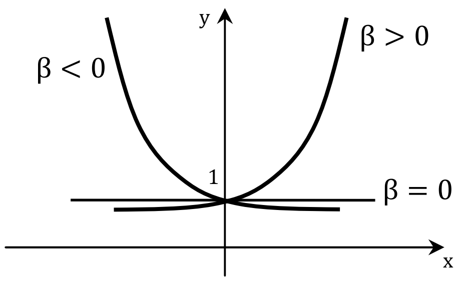
$$2.\int_0^{+\infty} f(x).e^{-px}dx \text{ je pro každou časovou funkci při } p > \alpha \textit{ absolutně konvergentní}.$$

Důkaz:

$$\int_0^{+\infty} |f(x).e^{-px}|.dx \leq M.\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}.e^{-px}.dx = M.\int_0^{+\infty} e^{x.(\alpha-p)}.dx = M.\left[\frac{e^{x.(\alpha-p)}}{\alpha-p}\right]_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{M}{\alpha-p}.\left[\lim_{x\to+\infty} e^{x.(\alpha-p)} - 1\right] = \frac{M}{p-\alpha} \qquad \alpha - p < 0 \Rightarrow p > \alpha$$

$g(x) = e^{\beta x}$




<u>Př.</u>

$$1.\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{+\infty} 1.e^{-px}.dx = \left[\frac{e^{-px}}{-p}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{p}.\left[\lim_{x\to+\infty} e^{-px} - 1\right] = \frac{1}{p} \quad p > 0$$

$$2.\mathcal{L}\{e^x\} = \int_0^{+\infty} e^x.e^{-px}.dx = \int_0^{+\infty} e^{x.(1-p)}.dx = \left[\frac{e^{x.(1-p)}}{1-p}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-p}.\left[\lim_{x\to+\infty} e^{x.(1-p)} - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{p-1} \quad p > 1$$

## Vlastnosti Laplaceovy transformace

**Věta 5.1.** (o jednoznačnosti vzoru)

Rovnice $L(p) = \int_0^{+\infty} f(x).e^{-px}.dx$ splňuje pro $p > \alpha$ *nejvýše jadna funkce* $f(x)$ exponenciálního řádu $\alpha$.

**Věta 5.2.** (linearita)

$1.\mathcal{L}\{c.f(x)\} = c.\mathcal{L}\{f(x)\}$

$2.\mathcal{L}\{f(x) + g(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\} + \mathcal{L}\{g(x)\}$

**Věta 5.4.** (o posunutí v obraze)

$\mathcal{L}\{f(x).e^{ax}\} = L(p-a)$

**Věta 5.3.** (o podobnosti)

$\mathcal{L}\{f(a.x)\} = \frac{1}{a}.L\left(\frac{p}{a}\right)$

$a \neq 0$

Př.

$\mathcal{L}\{e^{ax}\} = \frac{1}{a}.\,L\left(\frac{p}{a}\right) = \frac{1}{a}.\frac{1}{\frac{p}{a} - 1} = \frac{1}{p - a};\ a \neq 0$ – o podobnosti

$\mathcal{L}\{e^{x}\} = L(p) = \frac{1}{p - 1}$

$\mathcal{L}\{e^{ax}\} = \mathcal{L}\{1.\,e^{ax}\} = L(p - a) = \frac{1}{p - a}$ – o posunutí

$\mathcal{L}\{1\} = L(p) = \frac{1}{p}$