Posloupnosti funkcí

$f_1(x);\ f_2(x);\ f_3(x);\ \dots\ \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na $M \subset R$; např. $(a; b) = M$

$x \in R \rightarrow$ dostáváme posloupnost čísel

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{array}{ll} -\ \text{vlastní} & \text{konverguje} \\ -\ \text{nevlastní}\ (\pm\infty) & \text{diverguje} \\ -\ \text{neexistuje} & \text{diverguje} \end{array}$$

Určíme obor konvergence $M_1 \subset M$ dané posloupnosti.

Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ v M_1 – limitní funkce posloupnosti

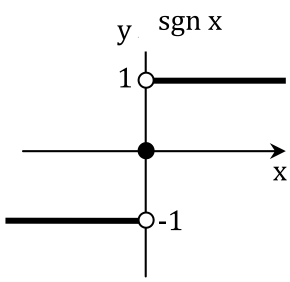
<u>Př.</u>

1. $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}; x \in R$

$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{x}{n} = \boxed{0 = f(x)}$ v R

limitní funkce

např. $x = 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = f(1)$



2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}.\text{arctg}\, n.x = \frac{2}{\pi}.\lim\limits_{n\to\infty} \text{arctg}\, n.x = \left\{\begin{array}{l} 1; x > 0 \\ 0; x = 0 \\ -1; x < 0 \end{array}\right\} f(x) = \text{sgn}\, x$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0; \exists n_0; (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

Bodová konvergence

$f_n(x) \rightarrow f(x)$ v $M \Leftrightarrow \forall x \in M; \forall\varepsilon > 0; \exists n_0; (n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$

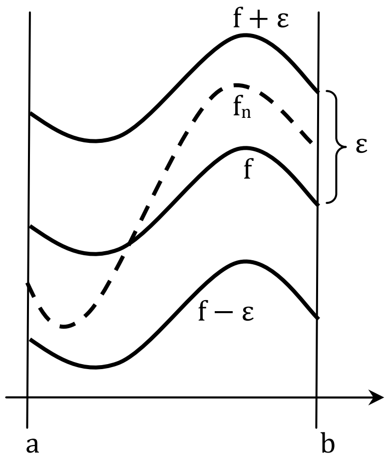
$$n_0 = n_0(x; \varepsilon)$$

Stejnoměrná konvergence

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v $M \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0; \exists n_0; \forall x \in M; (n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$

$$n_0 = n_0(\varepsilon) \quad f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

Př.



pokud se všechny funkce f_n schovají do pásu f+ε;f-ε

Řady funkcí

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Posloupnost částečných součtů (lze přiřadit)$\{s_n\}$

$$s_1(x) = f_1(x)$$
$$s_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$\vdots$$
$$s_n = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) -$$ součet řady v oboru konvergence M
$$\vdots$$
$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$$

$\sum f_n(x)$ konverguje ke svému součtu s v M – bodově
– vektorově

Pozn. Stejnoměrně konvergentní řady funkcí lze např. derivovat člen po členu

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots = s(x)$$
$$f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots = s'(x)$$

Weierstrassovo kritérium:

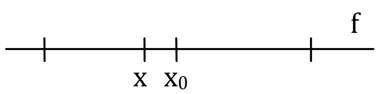
Nechť $\sum a_n$ je konvergentní číselná řada taková, že $\forall x \in M; \forall n \in N$ platí $|f_n(x)| \leq a_n$.
Pak řada $\sum f_n(x)$ konverguje absolutně a stejnoměrně v M.

Př.

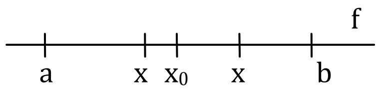
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ stejnoměrně konverguje v R, protože $\forall x \in R; \forall n \in N; \left|\frac{\sin n.x}{n^2}\right| = \frac{|\sin n.x|}{n^2} \leq \overset{a_n}{\frac{1}{n^2}}$

a řada $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje.

Fourierovy trigonometrické řady



Taylorovy řady – nahradíme s dostatečnou přesností v blízkosti bodu x_0



Aproximace na množině ⇒ **Fourierovy řady**

Definice (2. 1.) Systém funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ se nazývá ortogonální v $\langle a; b\rangle$ jestliže

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x).\,dx = 0 \text{ pro každé } m \neq n.$$

Věta (2. 1.) Systém funkcí $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty} = \{n; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x\}$ systém je ortogonální v $\langle -\pi; \pi\rangle$

$\boxed{\sin n.x = 0}$

Důkaz:

$\boxed{\cos n.\pi = (-1)^n}$

a) $$\int_{-\pi}^{\pi} 1.\cos n.x.\,dx = \left[\frac{\sin n.x}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}.(\sin n.\pi - \sin(-n.\pi)) = \frac{1}{n}.(0-0) = 0$$

b) $$\int_{-\pi}^{\pi} 1.\sin n.x.\,dx = \left[\frac{-\cos n.x}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n}.\big(\cos n.\pi - \cos(-n.\pi)\big) = -\frac{1}{n}.(\cos n.\pi - \cos n.\pi) =$$
$$= 0$$

c) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin m.x.\cos n.x.\,dx = \left| \begin{matrix} u = \sin m.x & \acute{u} = m.\cos m.x \\ \acute{v} = \cos n.x & v = \frac{\sin n.x}{n} \end{matrix} \right|$$

$$= \left[\frac{1}{n}\sin n.x.\sin m.x\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\cos m.x}^{u}.\overbrace{\sin n.x}^{\acute{v}}.\,dx \qquad \boxed{\begin{matrix} \acute{u} = -m.\sin m.x \\ v = -\frac{\cos n.x}{n} \end{matrix}}$$

$$= 0 - \frac{m}{n}.\left\{\left[-\frac{1}{n}.\cos m.x.\cos n.x\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{m}{n}.\int_{-\pi}^{\pi} \sin m.x.\cos n.x.\,dx\right\}$$

$$= \frac{m^2}{n^2}.\int_{-\pi}^{\pi} \sin m.x.\cos n.x.\,dx$$

jako rovnici

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right)\int_{-\pi}^{\pi} \sin m.x \cos n.x.\,dx = 0$$

$$\text{pro } m \neq n \text{ je } \int_{-\pi}^{\pi} \sin m.x \cos n.x \,.\, dx = 0$$

$$\text{pro } m = n \text{ dostáváme } \int_{-\pi}^{\pi} \boxed{\sin n.x \cos n.x} \,.\, dx = \frac{1}{2} \,.\, \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2.n.x \,.\, dx = \frac{1}{2} \,.\, \left[-\frac{\cos 2.n.x}{2.n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\boxed{\sin 2.\alpha = 2.\sin\alpha \,.\, \cos\alpha}$$

$$\cos \overbrace{(m.x + n.x)}^{\alpha+\beta} = \cos m.x \,.\, \cos n.x - \sin m.x \,.\, \sin n.x$$

$-$ $+$

$$\cos m.x \,.\, \cos n.x = \frac{1}{2}[\cos(m+n).x + \cos(m-n).x]$$

$$\sin m.x \,.\, \sin n.x = \frac{1}{2}[\cos(m-n).x - \cos(m+n).x]$$

obdobně

$$\sin(m.x + n.x) = \sin m.x \cos n.x + \cos m.x \sin n.x$$

$-$ $-$

$$\sin m.x \cos n.x = \frac{1}{2}[\sin(m+n).x + \sin(m-n).x]$$

---

d) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin m.x \sin n.x \,.\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n).x - \cos(m+n).x].\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n).x}{m-n} - \frac{\sin(m+n).x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\text{Obdobně } \int_{-\pi}^{\pi} \cos m.x \cos n.x \,.\, dx = 0 \quad m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1.1.\, dx = [x]_{-\pi}^{\pi} = \pi - (-\pi) = 2.\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n.x \cos n.x \,.\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 n.x \,.\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 + \cos 2.n.x \,.\, dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2.n.x}{2.n}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}[\pi - 0 - (-\pi + 0)] = \pi$$

Stejně

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin n.x \sin n.x\,.\,dx = \pi$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ &\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \\ &\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ &\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \end{aligned}}$$