IMA1E - Průběžná kontrolní písemná práce z Matematiky 1- verze 06-B

…………… ………….. …………. ……………………… ………………………………………

datum, čas stud. obor ročník osobní číslo studenta student (ka) - příjmení, jméno

1. a) Zapište podle definice co znamená, že

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall K \in R)(\exists h \in R)(\forall x \in (-\infty; h))(f(x) > K)$$

b) Vypočítejte

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{18.x^3}{(4-3.x)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{18.x^3}{16-24.x+9.x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{18.x^3}{x^3}}{\frac{16}{x^3}-\frac{24.x}{x^3}+\frac{9.x^2}{x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{18}{\frac{16}{x^3}-\frac{24}{x^2}+\frac{9}{x}} = \frac{18}{0} = \infty$$

Výsledek asi nebude správně!!!!

c) Určete typ limity a pomocí l'Hospitalova pravidla vypočítejte

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{x+\sin(11.x)}{\sin(3.x)}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to0} \frac{1+11.\cos(11.x)}{3.\cos(3.x)} = \frac{12}{3} = 4$$

d) Určete inverzní funkci k funkci $f: y = 2 + 4.\sin x$. Stanovte vhodný Df (tj. interval, na němž je $\sin x$ rostoucí) a určete Hf, Df^{-1} a Hf^{-1}.

$$y - 2 = 4.\sin x$$

$$\frac{y-2}{4} = \sin x$$

$$x = \arcsin\frac{y-2}{4} \Rightarrow y = \arcsin\frac{x-2}{4}$$

$$Df = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$Hf = \langle -2; 6 \rangle$$

$$Df^{-1} = \langle -2; 6 \rangle$$

$$Hf^{-1} = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

2. a) Vypočtěte **podle definice** $f'(2)$, když $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$f'(x): \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\frac{x-x-h}{x.(x+h)}}{h} = \lim_{h\to0} \frac{-h}{x^2.h+x.h^2} = \lim_{h\to0} \frac{-h}{h.(x^2+x.h)} = \lim_{h\to0} \frac{-1}{x^2+x.h} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

b) Vypočítejte $f'(x)$, když $f(x) = 10^x.\arcsin x$, a určete Df'. $Df' = (-1;1)$

$$f'(x) = 10^x.\ln 10.\arcsin x + 10^x.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 10^x.\left(\ln 10.\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

c) Vypočítejte $f'(x)$, když $f(x)=\operatorname{arctg}^2(3.x)$, a určete Df'. $Df' = R$

$$f'(x)=2.\operatorname{arctg}(3.x).\frac{1}{9.x^2+1}.3=\frac{6.\operatorname{arctg}(3.x)}{9.x^2+1}$$

d) Vypočítejte $f'(x)$, když $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, a určete Df'. $Df' = (0;+\infty)$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.x^2-\ln(x).2.x}{x^4}=\frac{x-2.x.\ln x}{x^4}=\frac{x.(1-2.\ln x)}{x^4}=\frac{1-2.\ln x}{x^3}$$

3. a) Zapište větu - postačující podmínku ryzí konvexnosti funkce na intervalu $(b ; d)$.

b) Zjistěte, ve které bodě má funkce $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}.x$ lokální extrém a jaký.

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=0\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=2 \qquad y=\ln 2-\frac{1}{2}.2=\ln 2-1$$

$$f''(x)=-1.\frac{1}{x^2} \qquad f''(2)=-\frac{1}{2^2}=-\frac{1}{4}<0$$

Lokální maximum $[2;\ln 2-1]$

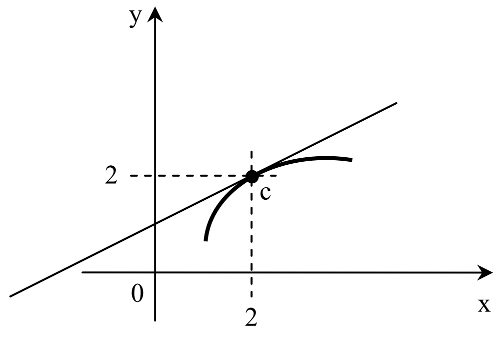
c) Je dána funkce $f(x)=-\cos x$, vypočítejte její první a druhou derivaci a určete, zda je daná funkce na intervalu $(0 ; \frac{\pi}{2})$ kladná nebo záporná, rostoucí nebo klesající, konvexní nebo konkávní. $f'(x)=\sin x$ $f''(x)=\cos x$

	$(0 ; \frac{\pi}{2})$
$f(x)$	- znaménko
$f(x)$	záporná kladná - záporná

	$(0 ; \frac{\pi}{2})$
$f'(x)$	+ znaménko
$f(x)$	rostoucí rostoucí –klesajícvi

	$(0 ; \frac{\pi}{2})$
$f''(x)$	+ znaménko
$f(x)$	konvexní konvexní -konkávní

d) Zakreslete lokální průběh funkce $f(x)$ v bodě $c = 2$ a jeho nejbližším okolí, když víte, že $f(2)=2$, $f'(2)=\frac{1}{2}$, $f''(2)=-4$ (tj. nakreslete do kartézské soustavy souřadnic bod grafu, tečnu a charakteristický oblouk grafu v daném bodě) .



$c=(2;2)$

$$y-y_0=k.(x-x_0)$$

Rovnice tečny: $y-2=\frac{1}{2}.(x-2)\Rightarrow y=\frac{1}{2}.x+1$

4. a) Zapište větu o rozdílu primitivních funkcí.

Předpoklad: Jestliže funkce $F(x)$ a $G(x)$ jsou dvě určité primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu J,

Tvrzeni: potom $F(x)-G(x)$ je na intervalu J konstantní funkce.

b) Vypočítejte (po úpravě integrované funkce)

$$\int \frac{10^x - 5^{x+1}}{5^x}.dx = \int\left(\frac{10^x}{5^x} - \frac{5^{x+1}}{5^x}\right).dx = \int\left(2^x - \frac{5.5^x}{5^x}\right).dx = \int\left(2^x - 5\right).dx = \frac{2^x}{\ln 2} - 5.x + c$$

c) Vypočítejte (per partes)

$$\int\left(2.x^4 + 1\right).\ln x.dx = \begin{vmatrix} u' = 2.x^4 + 1 & v = \ln x \\ u = \frac{2}{5}.x^5 + x & v' = \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \ln x.\left(\frac{2}{5}.x^5 + x\right) - \int \frac{1}{x}.\left(\frac{2}{5}.x^5 + x\right).dx =$$

$$= \ln x.\left(\frac{2}{5}.x^5 + x\right) - \int\left(\frac{2}{5}.x^4 + 1\right).dx = \ln x.\left(\frac{2}{5}.x^5 + x\right) - \frac{2}{25}.x^5 - x + c$$

d) Vypočítejte (substitucí)

$$\int 8.\mathrm{tg}^3 x.\frac{1}{\cos^2 x}.dx = \left[\begin{vmatrix} t = \mathrm{tg}(x) \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x}.dx \end{vmatrix} = \int 8.t^3.dt = 8.\frac{t^4}{4} = 2.t^4 + c\right] = 2.\mathrm{tg}^4 x + c$$