OPRAVA UEIT – Univerzita Pardubice OPRAVA

IMA1E - Průběžná kontrolní písemná práce z Matematiky 1- verze 06-A

……..…… …………. …………. ……………………… ……….…………………………

datum, čas stud. obor ročník osobní číslo studenta student (ka) - příjmení, jméno

1. a) Zapište podle definice co znamená, že

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall k \in R)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (c-\delta; c))(f(x) < k)$$

b) Vypočítejte

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{x}-\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^x = \frac{e^{-3}}{e^1} = e^{-4}$$

c) Určete typ limity, vhodně upravte a pomocí l'Hospitalova pravidla vypočítejte

$$\lim_{x\to0}\frac{2.x-\sin(4.x)}{\operatorname{tg} x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to0}\frac{2-4.\cos(4.x)}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{2-4}{1} = -2$$

d) Určete inverzní funkci k funkci $f: y = \frac{1}{2}.\ln(x+1)$. Stanovte „maximální" Df a určete k němu Hf , Df^{-1} a Hf^{-1}

$f^{-1}: 2.y = \ln(x+1)$ $\quad Df = (-1;+\infty)$

$e^{2.y} = x+1$ $\quad Hf = (-\infty;+\infty)$

$e^{2.y} - 1 = x$ $\quad Df^{-1} = (-\infty;+\infty)$

$y = e^{2.x} - 1$ $\quad Hf^{-1} = (-1;+\infty)$

2. a) Vypočtěte **podle definice** $f'(5)$, když $f(x) = x^2 + x$.

$$f'(x): \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2+x+h-x^2-x}{h} = \lim_{h\to0}\frac{x^2+2.x.h+h^2+x+h-x^2-x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{h^2+2.x.h+h}{h} = \lim_{h\to0}\frac{h.(h+2.x+1)}{h} = \lim_{h\to0}(h+2.x+1) = 2.x+1$$

$f'(5) = 2.5 + 1 = 11$

b) Vypočítejte $f'(x)$, když $f(x) = 2^x.\arccos x$, a určete Df'. $\quad Df' = (-1;1)$

$$f'(x) = 2^x.\ln 2.\arccos x + 2^x.\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 2^x.\ln 2.\arccos x - 2^x.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2^x.\left(\ln 2.\arccos x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

c) Vypočítejte $f'(x)$, když $f(x) = \ln^4\left(\frac{x}{3}\right)$, a určete Df'. $\quad Df' = (0;+\infty)$

$$f'(x) = 4.\ln^3\left(\frac{x}{3}\right).\frac{3}{x}.\frac{1}{3} = \frac{4}{x}.\ln^3\left(\frac{x}{3}\right)$$

d) Vypočítejte $f'(x)$, když $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$, a určete Df'. $\quad Df' = R$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x^2+1}.(1+x^2)-\operatorname{arctg}x.2x}{(1+x^2)^2}=\frac{-2.x.\operatorname{arctg}x}{(1+x^2)^2}$$

3. a) Zapište větu - postačující podmínku pro ostré lokální minimum funkce v bodě c.
$f'(c)=0$ a $f''(0)>0$

b) Zjistěte, ve kterém bodě má funkce $f(x)=\frac{2}{3}.x^{\frac{3}{2}}-2.x-2$ lokální extrém a určete jej.

$$f'(x)=\frac{2}{3}.\frac{3}{2}.x^{\frac{1}{2}}-2=x^{\frac{1}{2}}-2 \quad f'(x)=0\Rightarrow x^{\frac{1}{2}}-2=0\Rightarrow x=4 \quad y=\frac{2}{3}.4^{\frac{3}{2}}-2.4-2=-\frac{14}{3}$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2.\sqrt{x}} \quad f''(4)=\frac{1}{2.\sqrt{4}}=\frac{1}{4}>0\Rightarrow \text{lok. minimum}\left[4;-\frac{14}{3}\right]$$

c) Je dána funkce $f(x)=\sin(-x)$, vypočítejte její první a druhou derivaci a určete, zda je daná funkce na intervalu $(0\,;\,\frac{\pi}{2})$ kladná nebo záporná, rostoucí nebo klesající, konvexní nebo konkávní.

$f'(x)=-\cos(-x)$ $\qquad f''(x)=-\sin(-x)$

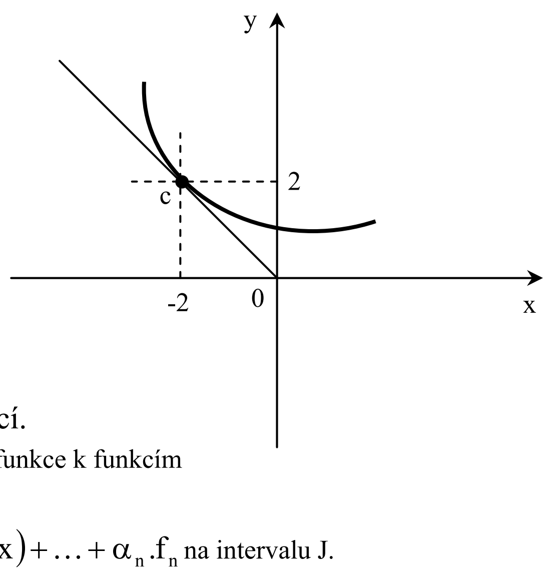
	$(0\,;\,\frac{\pi}{2})$
$f(x)$	- Znaménko
$f(x)$	záporná kladná - záporná

	$(0\,;\,\frac{\pi}{2})$
$f'(x)$	- Znaménko
$f(x)$	klesající rostoucí –klesající

	$(0\,;\,\frac{\pi}{2})$
$f''(x)$	+ znaménko
$f(x)$	konvexní konvexní -konkávní

----

d) Zakreslete lokální průběh funkce $f(x)$ v bodě $c=-2$ a jeho nejbližším okolí, když víte, že $f(-2)=2$, $f'(-2)=-1$, $f''(-2)=4$ (tj. nakreslete do kartézské soustavy souřadnic bod grafu, tečnu a charakteristický oblouk grafu v daném bodě) . $\quad c=[-2;2]$



Rovnice tečny: $\begin{array}{l} y-y_0=k.(x-x_0) \\ y-2=-1.(x+2)\Rightarrow y=-x \end{array}$

4. a) Zapište větu o primitivní funkci k lineární kombinaci funkcí.

Předpoklad: Jestliže funkce $F_1(x),\ldots,F_n(x)$ jsou po řadě primitivní funkce k funkcím $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ na intervalu J a $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ libovolná reálná čísla.

Tvrzení: potom $\alpha_1.F_1(x)+\ldots+\alpha_n.F_n$ je primitivní funkce k funkci $\alpha_1.f_1(x)+\ldots+\alpha_n.f_n$ na intervalu J.

b) Vypočítejte (po úpravě integrované funkce)

$$\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}.dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right).dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right).dx=\operatorname{tg}(x)-x+c$$

c) Vypočítejte (per partes)

$$\int (2.x+1).e^{x}.dx = \begin{vmatrix} u' = e^{x} & v = 2.x+1 \\ u = e^{x} & v' = 2 \end{vmatrix} = e^{x}.(2.x+1) - \int 2.e^{x} = e^{x}.(2.x+1) - 2.e^{x} + c =$$

$$= e^{x}.(2.x-1) + c$$

d) Vypočítejte (substitucí)

$$\int \frac{8}{\cos^{5} x}.(-\sin x).dx = \left[\begin{vmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x.dx \end{vmatrix} = \int \frac{8}{t^{5}}.dt = 8.\int t^{-5}.dx = 8.\frac{t^{-4}}{-4} = -2.t^{-4} = -\frac{2}{t^{4}} + c \right] = -\frac{2}{\cos^{4} x} + c$$